Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

Д. Р. МЕРКИН

АЛГЕБРА СВОБОДНЫХ И СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

ФИЗМАТГИЗ • 1962

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

Д. Р. МЕРКИН

АЛГЕБРА СВОБОДНЫХ И СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

АННОТАЦИЯ

В книге дается подробное изложение алгебры свободных и скользящих векторов. Содержание первой главы соответствует в основном программе по векторной алгебре курса высшей математики втузов. Во второй главе рассматривается теория преобразования системы скользящих векторов и приведения их к простейшему виду. Эта теория имеет важное значение в различных вопросах физики и техники; она может рассматриваться также, как вводная глава винтового исчисления.

В книге большое внимание уделено примерам и разъяснению некоторых деталей и особенностей векторного исчисления, весьма важных в приложениях.

Книга может служить учебным пособием для студентов и преподавателей втузов и университетов. Она рассчитана также на инженеров, желающих повысить свою теоретическую подготовку.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее руководство, содержащее алгебру свободных и скользящих векторов, составлено с учетом опыта, приобретенного автором при чтении высшей математики и теоретической механики во втузах Ленинграда.

Книга состоит из двух глав. Содержание первой главы соответствует (за исключением небольших дополнений) программе векторной алгебры курса высшей математики втузов. Во второй главе рассматривается теория скользящих векторов. Эта теория носит общий характер, и она имеет значение не только в физике, но также для других дисциплин, в частности, она может рассматриваться как вводная глава винтового исчисления.

Литература по векторному исчислению весьма обширна, и мы не имеем возможности перечислить все источники, которые в большей или меньшей степени оказали влияние на характер настоящей книги. Но автор считает себя обязанным отметить следующие руководства, которыми он больше всего пользовался: Н. Е. Кочин, «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления», изд. АН СССР, 1951; Я. С. Дубнов, «Основы векторного исчисления», ч. I, ГИТТЛ, 1939; Г. К. Суслов, «Теоретическая механика» (первая глава), Гостехиздат, 1946; Ш. Ж. Валле-Пуссен, «Лекции по теоретической механике» (Введение), ИЛ, 1948; Т. Леви-Чивита и У. Амальди, «Курс теоретической механики» (глава I), ИЛ, 1952.

Книга может служить учебным пособием для студентов втузов и университетов; она рассчитана также на инженеров, желающих повысить свою теоретическую подготовку. В связи с этим при изложении большое внимание уделено примерам и разъяснению некоторых деталей и особенностей векторного исчисления, весьма важных в приложениях.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Г. Ю. Джанелидзе, сделавшему ряд ценных замечаний при чтении рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Очень много самых различных величин, встречающихся в физике, технике и математике, носят векторный характер — они определяются не только числом, но и направлением. Потребность в различных операциях над ними привела к возникновению нового исчисления, которое оперирует не с числами, а с векторами.

Векторное исчисление, созданное в XIX в. трудами ученых различных стран (Гамильтоном, Мёбиусом, Грассманом, Максвеллом, Гиббсом и др.), получило в последние десятилетия широкое распространение. В настоящее время различные исследования в области многих разделов физики и математики, а также преподавание этих дисциплин ведется с привлечением векторного исчисления. Такому широкому распространению оно обязано главным образом следующими обстоятельствами: во-первых, векторное исчисление часто значительно сокращает вычисления; во-вторых, и это самое важное, векторное исчисление очень богато приложениями, так как позволяет выразить связь между различными физическими величинами непосредственно, не прибегая к вспомогательной надстройке в виде системы координат.

Поясним сказанное примером.

При изучении движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, Эйлер получил следующие выражения для проекций скорости любой точки тела:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x, \qquad (*)$$

где v_x, v_y, v_z — проекции скорости $\mathbf{v}$ на оси прямоугольной системы координат $Oxyz$; ω_x, ω_y, ω_z — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на те же оси и x, y, z — координаты точки, скорость которой определяется. Непосредственно по этим формулам мы можем вычислить не скорость точки $\mathbf{v}$, а только ее проекции (для определения величины и направления скорости нужны еще дополнительные действия), причем необходимо предварительно ввести систему координат, которая к существу рассматриваемого вопроса никакого отношения не имеет.

Но три скалярных выражения (*) можно заменить одной векторной формулой, которой они эквивалентны:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Эта формула в отличие от равенств (*) непосредственно связывает вектор скорости $\mathbf{v}$, вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и определяющий положение точки вектор $\mathbf{r}$, а не их проекции. Поэтому оказывается излишним введение координатной системы; более того, эта формула сразу указывает величину и направление скорости (см. ниже, (9.1)); наконец, ее вывод проще вывода формул (*).

Однако векторное исчисление нельзя рассматривать как единственно целесообразное — многие вопросы значительно проще и нагляднее излагаются в обычной скалярной форме. Так, например, некоторые разделы аналитической геометрии и почти всю дифференциальную геометрию целесообразнее излагать с помощью векторного исчисления; многие вопросы статики и почти вся кинематика твердого тела также становятся нагляднее в векторном изложении. Вместе с тем, прямую на плоскости, кривые второго порядка, статику сплошной среды, динамику в большей своей части удобнее излагать с помощью аналитических методов. Поэтому необходимо уметь быстро переходить от векторной к скалярной форме изложения и наоборот.

ГЛАВА I
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Скалярные и векторные величины. Для характеристики некоторых величин, встречающихся в математике, физике, технике, требуется (при выбранной единице измерения) знание одного вещественного числа. Например, объем, масса, температура, коэффициент трения и т. п. вполне определяются одним числом (безразмерным или соответствующей размерности), причем это число может быть как положительным, так и отрицательным. Такие величины называются *скалярными* и они могут быть изображены в соответствующем масштабе на шкале (лат. scalaris — лестничный, ступенчатый).

Наряду со скалярами часто встречаются величины, для характеристики которых знания одного числа недостаточно. Так, сила, напряженность магнитного поля, скорость и ускорение точки характеризуются не только числом, но и направлением. Такие величины называются *векторными* (лат. vector — несущий, везущий).

Более подробные сведения о характере скалярных и векторных величин будут даны в п. 8 § 6 и п. 8 § 9.

2. Определение вектора. К определению вектора можно подойти различными путями. Учитывая характер данного руководства, остановимся на следующем определении (другое определение вектора см. на стр. 67).

Вектором называется *направленный отрезок*, для которого заданы:

1) длина отрезка, называемая *модулем* или просто величиной вектора (длина вектора определяется выбранным масштабом);

2) *начальная точка* (точка приложения вектора);

3) прямая, на которой лежит вектор (*линия действия* вектора);

4) *сторона действия*, т. е. на прямой указывается порядок перехода от начала вектора к его концу.

Последние два элемента весьма часто объединяются в одно понятие — *направление вектора*, причем под этим понимается совокупность линии действия (или прямой, ей параллельной) и стороны действия.

Обозначается вектор либо одной буквой (в печатных изданиях буква, обозначающая вектор, обычно набирается жирным шрифтом), либо двумя буквами со стрелкой наверху, при этом первая буква означает начало вектора, а вторая — его конец. Так, на рис. 1 изображен вектор, лежащий на прямой α, A — его начальная, а B — конечная точки (очевидно, что вектор вполне определяется заданием начальной и конечной точек). Этот вектор можно обозначить одной какой-нибудь жирной буквой, например $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и т. п., или двумя буквами со стрелкой наверху $\overrightarrow{AB}$. Следует обратить внимание на порядок букв в последнем обозначении, и нельзя смешивать вектор $\overrightarrow{AB}$ с вектором $\overrightarrow{BA}$, в котором точка B является начальной, а A — конечной. На чертеже направление вектора обозначается, как правило, стрелкой, и в этом случае она определяет конечную точку.

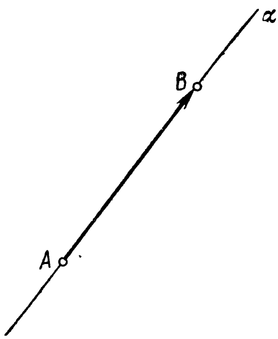

Рис. 1.

Модуль вектора обозначается той же буквой (буквами), заключенной в две вертикальные черточки: $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$, $|\overrightarrow{AB}|$, ..., или буквами, напечатанными обыкновенным шрифтом, т. е. a, b, c, AB, ..., так что $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ и т. п. Заметим, что модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ равен модулю вектора $\overrightarrow{BA}$, т. е. $AB = BA$, но векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ различны.

3. Классификация векторов. Остановимся на одной из классификаций векторов, состоящей в следующем.

1. *Несвободным* или *приложенным* вектором называется вектор, для которого недопустимо какое-либо изменение

точки приложения. Примером несвободного вектора может служить сила, приложенная к деформируемому телу, напряженность неоднородного магнитного поля и т. п.

2. Если вектор можно переносить вдоль линии его действия, то такой вектор называется *скользящим*. Для скользящего вектора существенное значение имеет лишь линия действия, а точка приложения роли не играет. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу, угловая скорость твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и т. п.

3. Если вектор можно переносить *) в пространстве параллельно своему начальному положению, то такой вектор называется *свободным*. Свободный вектор характеризуется только модулем и направлением, точка приложения и линия действия не имеют значения. Примерами свободного вектора могут служить скорость точек твердого тела, участвующего в поступательном движении, момент пары сил, приложенной к абсолютно твердому телу, и др.

Следует иметь в виду, что один и тот же вектор в различных задачах может быть как приложенным, так и скользящим или свободным. Так, например, сила, приложенная к абсолютно твердому телу, представляет скользящий вектор, а та же самая сила, приложенная к деформируемому телу, будет уже несвободным вектором. Вопрос о том, какие векторы являются свободными, скользящими или приложенными, в математике определяется условием задачи, а в приложениях — сущностью явления.

Для приложенного (несвободного) вектора должны быть заданы все его элементы, а именно: модуль, точка приложения, линия и сторона действия. Естественно, что при задании скользящего вектора из этих четырех элементов может быть опущена точка приложения, а при задании свободного вектора можно не указывать точку приложения и линию действия.

В этой главе рассматривается алгебра свободных векторов, но большинство полученных здесь результатов могут быть применены и для скользящих и несвободных векторов.

---

*) Под содержащимися в этих определениях словами «можно переносить» понимается, что указанные действия не нарушают условий задачи или что они не изменяют данного явления и его характеристики.

4. Равенство векторов. Два вектора называются *равными*, если они параллельны, направлены в одну сторону и имеют равные модули, т. е. если $a = b$ и $\mathbf{a} \downarrow\downarrow \mathbf{b}$, то

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Пример 1. В ромбе $ABCD$ (рис. 2) имеем две пары равных векторов: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (или $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$).

Равенство сторон AB и AD не влечет за собой равенства векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, так как эти векторы хотя и имеют одинаковые модули, но различно направлены.

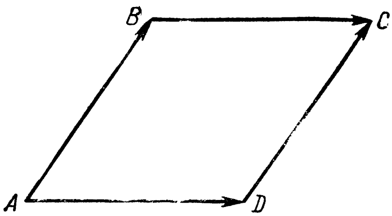

Рис. 2.

Пример 2. При равномерном движении точки по кривой величина скорости v не изменяется, но сама скорость $\mathbf{v}$, будучи вектором, направленным по касательной к траектории, меняется непрерывно.

Определение равенства векторов, носящее чисто геометрический характер, не следует смешивать с понятием эквивалентности *). Так, например, из равенства (по величине и направлению) двух сил, приложенных в разных точках тела, не следует, что эти силы эквивалентны, т. е. что они оказывают одинаковое действие на тело.

5. Перенос вектора. В векторном исчислении употребляется операция *переноса* или, как часто говорят, *приведения вектора к данной точке* (*полюсу*). Под этой операцией понимается такой *параллельный* перенос вектора, при котором его начало будет совпадать с выбранной точкой (полюсом). На рис. 3 изображено одновременное приведение четырех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ к одному полюсу O.

Так же как и при равенстве векторов, математическая операция переноса вектора не затрагивает вопроса эквива-

*) Определение эквивалентности и приведение системы векторов к простейшему виду будет рассмотрено во второй главе.

лентности исходного и приведенного векторов — она просто устанавливает определенное правило.

6. Нуль-вектор. *Нуль-вектором* называется вектор, модуль которого равен нулю. К понятию нуль-вектора легко подойти, если задать вектор своими концами и рассмотреть вырожденный случай, когда начало и конец вектора совпадают. Часто сокращенно, но не совсем точно, говорят: вектор равен нулю (вместо нуль-вектору).

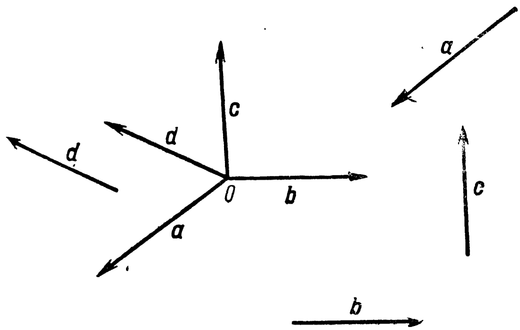

Рис. 3.

7. Компланарность и коллинеарность векторов. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*. При приведении компланарных векторов к одной точке они расположатся в одной плоскости. Поэтому о системе компланарных векторов имеет смысл говорить только в том случае, если число векторов не меньше трех (два вектора, имеющих одну общую точку, определяют по крайней мере одну плоскость).

Векторы, лежащие на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. При приведении коллинеарных векторов к одной точке они расположатся на одной прямой.

8. Прямопротивоположные векторы. Два вектора, равных по модулю, параллельных между собой, но направленных в противоположные стороны, называются *прямопротивоположными* или равнопротивоположными. Если вектор $\mathbf{b}$ прямопротивоположен вектору $\mathbf{a}$, то это обозначают следующим образом:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a};$$

естественно, что векторы $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$ — прямопротивоположны.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Многоугольник (цепочка) векторов. Операция сложения векторов возникла как простое обобщение правила сложения сил и скоростей.

Пусть дано n векторов: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Проведем следующее построение: выберем произвольную точку (полюс) O и перенесем вектор $\mathbf{a}_1$, совместив его начало с выбранным полюсом. Затем перенесем второй вектор $\mathbf{a}_2$ так, чтобы его начало совпало с концом первого вектора, после чего перенесем третий вектор $\mathbf{a}_3$ так, чтобы его начало совпало с концом второго вектора, и так далее до последнего вектора $\mathbf{a}_n$. В результате получится ломаная линия, составленная из данных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Эта ломаная линия, расположенная в общем случае в пространстве, называется *многоугольником* или *цепочкой* векторов (на рис. 4 представлен

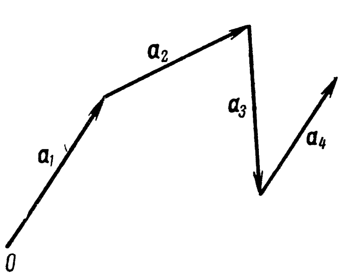

Рис. 4.

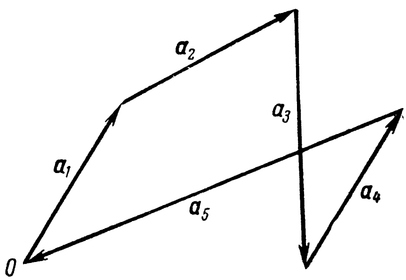

Рис. 5.

многоугольник векторов, составленный для случая $n=4$). Следует обратить внимание на порядок следования стрелок в многоугольнике векторов — все они идут одна за другой. Если конец последнего вектора совпадает с началом первого, то многоугольник векторов называется *замкнутым*, в противном случае *разомкнутым*. На рис. 4 показан разомкнутый многоугольник векторов ($n=4$), а на рис. 5 показан замкнутый многоугольник векторов ($n=5$).

2. Сумма векторов. Рассмотрим общий случай (многоугольник векторов разомкнут) и построим вектор $\mathbf{s}$, идущий из начала первого в конец последнего (рис. 6). Этот вектор называется *замыкающим вектором* или *суммой данных векторов*

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n, \tag{2.1}$$

короче это можно записать так:

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i. \tag{2.1'}$$

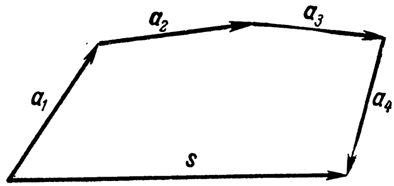

Рис. 6.

Если многоугольник векторов замкнут, то замыкающий вектор равен нулю (правильнее — нуль-вектору)

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = 0.$$

3. Свойства суммы векторов. Важно отметить, что сумма векторов не зависит от порядка построения многоугольника вектора, т. е. для суммы векторов справедлив *переместительный* (коммутативный) закон. Для доказательства этого утверждения рассмотрим более подробно сложение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Выберем точку O полюсом и построим сначала вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а затем вектор $\mathbf{s}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Если это построение выполнить на одном чертеже, начав его в обоих случаях из одной точки O, то легко видеть (рис. 7), что конец вектора $\mathbf{b}$ в первом построении будет совпадать с концом вектора $\mathbf{a}$ во втором построении (полученная фигура будет параллелограммом — противоположные стороны, по определению равенства векторов, равны и параллельны). Поэтому замыкающий вектор $\mathbf{s}$ многоугольника векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ будет совпадать с замыкающим вектором $\mathbf{s}_1$ многоугольника векторов $\mathbf{b} + \mathbf{a}$, и, следовательно, для суммы двух векторов переместительный (коммутативный) закон справедлив

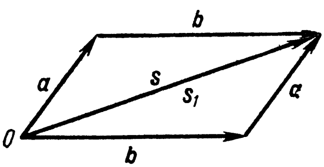

Рис. 7.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Так как при сложении любой пары векторов в равенстве (2.1) имеет место закон переместительности, то и сумма n векторов также обладает этим свойством.

Пример. На рис. 8 дано построение суммы трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, образующих стороны прямоугольного параллелепипеда, причем в одном случае строится сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, а в другом $\mathbf{c}+\mathbf{b}+\mathbf{a}$. В обоих случаях построение начинается из одной точки O; суммы векторов, как и следует из общей теории, одинаковы (одинаковы замыкающие векторы), но многоугольники векторов разные ($OABC$ и $ODEC$).

Сумма векторов обладает и *сочетательным* (ассоциативным) свойством, что легко установить непосредственно из

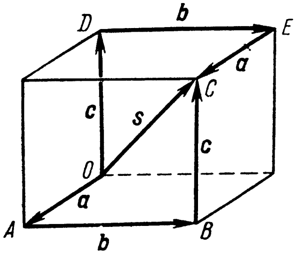

Рис. 8.

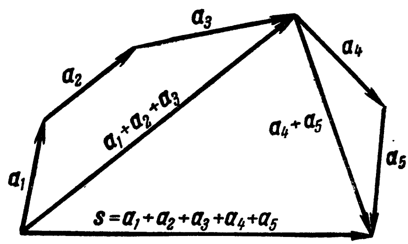

Рис. 9.

определения суммы. Так, на рис. 9 показана сумма пяти векторов

$$\mathbf{s}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5$$

и суммы $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5$, причем видно, что

$$\mathbf{s}=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)+(\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5).$$

В случае коллинеарности слагаемых векторов векторный многоугольник располагается на одной прямой и модуль суммы векторов будет равен алгебраической сумме их модулей (нужно учитывать направления векторов). Если же векторы, кроме того, направлены в одну сторону, то модуль суммы будет равен арифметической сумме их модулей.

4. Правила параллелограмма и параллелепипеда. Часто при построении суммы двух векторов пользуются не правилом многоугольника (в данном случае треугольника), а *правилом параллелограмма*, сущность которого ясна из рис. 7.

Читается это правило так: сумма двух векторов равна вектору, совпадающему по величине и направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах (читатель легко усмотрит в этом простое обобщение правила параллелограмма сил и скоростей).

Аналогично, если даны три некомпланарных (т. е. не параллельных одной плоскости) вектора **a**, **b** и **c**, то их сумма, очевидно, будет равна вектору, совпадающему по величине и направлению с диагональю параллелепипеда, построенного на данных векторах (см. рис. 8 и 10).

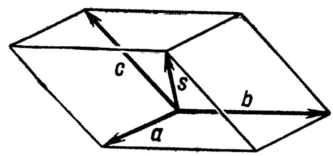

Рис. 10.

5. Разность двух векторов. *Разностью* двух векторов **a** — **b** называется третий вектор **d**, который, будучи сложен с вектором **b**, даст вектор **a**. Таким образом, из определения разности следует, что равенство

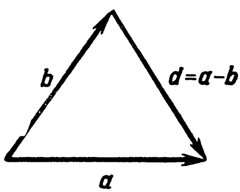

Рис. 11.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d}$$

равносильно равенству

$$\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{a}.$$

На рис. 11 дано построение разности.

Пользуясь терминологией арифметики, условно можно назвать вектор **a** уменьшаемым вектором, а **b** вычитаемым вектором.

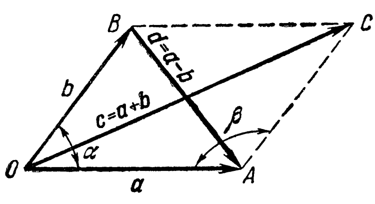

Рис. 12.

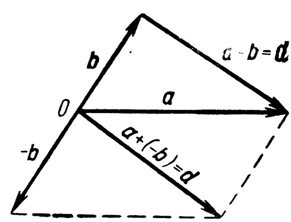

Рис. 13.

Если на данных векторах **a** и **b** построить параллелограмм, то, как легко видеть из рис. 12, сумма векторов **a** + **b** равна вектору, совпадающему с одной диагональю, а разность **a** — **b** — с другой диагональю параллелограмма.

Разность векторов $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

На рис. 13 дано соответствующее построение.

6. Свойства модуля суммы векторов. Пусть α — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 12). Из треугольника OAC на основании теоремы косинусов имеем:

$$c^2=|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta.$$

Но $\beta=\pi-\alpha$, $\cos\beta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ и, следовательно,

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \tag{2.2}$$

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны и направлены в одну сторону, то $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ и

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=a^2+b^2+2ab.$$

Отсюда

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=a+b.$$

Если же векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, но направлены в разные стороны, то $\alpha=\pi$, $\cos\alpha=-1$ и

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=a-b.$$

Следовательно, в общем случае

$$a-b\leqslant|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant a+b. \tag{2.3}$$

Это очевидно и из элементарных соображений (длина стороны треугольника не превосходит сумму длин двух других сторон и не меньше их разности).

Правую часть этого неравенства легко распространить на случай n слагаемых

$$|\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n|\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n, \tag{2.4}$$

т. е. модуль суммы векторов не превосходит сумму модулей слагаемых векторов (это свойство является обобщением свойства абсолютных величин для относительных чисел).

§ 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

1. Умножение вектора на число. *Произведением* вектора **a** на число (скаляр) λ называется новый вектор $\lambda\mathbf{a}$, определенный следующим образом.

1. Модуль вектора $\lambda\mathbf{a}$ равен произведению модуля вектора **a** на абсолютное значение числа λ, т. е.

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|.$$

2. Точка приложения вектора $\lambda\mathbf{a}$ совпадает с точкой приложения вектора **a** (для несвободного вектора).

3. Вектор $\lambda\mathbf{a}$ лежит на линии действия вектора **a**.

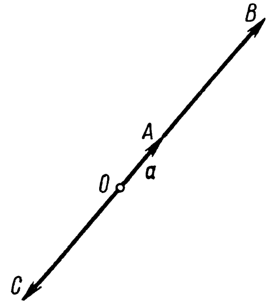

Рис. 14.

4. Если число λ положительно, то вектор-произведение $\lambda\mathbf{a}$ направлен в сторону вектора **a**, если же число λ отрицательно, то вектор $\lambda\mathbf{a}$ направлен в сторону, противоположную **a**.

Естественно, что если вектор **a** свободный, то вектор-произведение $\lambda\mathbf{a}$ может лежать на прямой, параллельной линии действия вектора **a**, и точка приложения может строго не устанавливаться.

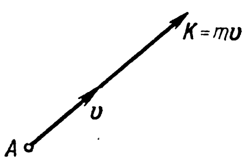

Рис. 15.

Пример 1. На рис. 14 показаны векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = -2\mathbf{a}$.

Пример 2. Количеством движения **K** материальной точки называется произведение массы этой точки m на ее скорость **v**

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}.$$

На рис. 15 показаны векторы **v** и **K**. Оба вектора направлены в одну сторону (масса m — число положительное) и имеют начало в точке A. Заметим, что сравнивать длины векторов **v** и **K** нельзя, так как они разной размерности и изображаются на одном чертеже в разных масштабах.

Рассмотрим равнопротивоположные векторы **a** и $-\mathbf{a}$. Очевидно, что вектор $-\mathbf{a}$ можно рассматривать как произведение числа -1 на вектор **a**:

$$-\mathbf{a} = (-1)\,\mathbf{a}.$$

2. Свойства произведения. Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:

1) *сочетательное* свойство

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu)\,\mathbf{a}; \tag{3.1}$$

2) *распределительное* свойство по отношению к *числовому* множителю

$$(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}; \tag{3.2}$$

3) *распределительное* свойство по отношению к *векторному* множителю

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \tag{3.3}$$

Докажем для примера третье свойство.

Пусть для определенности число λ отрицательно. Приведем векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ к одному началу, построим сумму векторов $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (диагональ параллелограмма) и векторы $\lambda\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{b}$. Вектор $\lambda\mathbf{a}$, по определению произведения, при $\lambda < 0$ противоположен вектору $\mathbf{a}$ и его модуль равен $|\lambda|\,a$. Вектор $\lambda\mathbf{b}$ противоположен $\mathbf{b}$ и его модуль равен $|\lambda|\,b$ (на рис. 16 вектор $\lambda\mathbf{a} = \overrightarrow{OA'}$ и $\lambda\mathbf{b} = \overrightarrow{OB'}$). Параллелограмм $OA'C'B'$

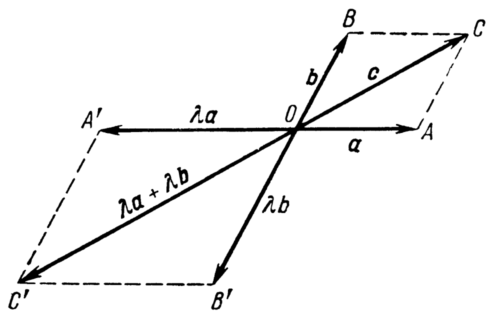

Рис. 16.

подобен параллелограмму $OACB$ (стороны одного параллелограмма служат продолжениями сторон другого и $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = |\lambda|$). Из этого вытекает, что углы между диагоналями и соответствующими сторонами равны и, следовательно, диагональ OC' служит продолжением диагонали OC.

Кроме того, из подобия следует пропорциональность не только сторон, но и диагоналей

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = |\lambda|.$$

Отсюда

$$OC' = |\lambda| \cdot OC.$$

Учитывая направление вектора и выбранный знак числа λ, будем иметь:

$$\overrightarrow{OC'} = \lambda \overrightarrow{OC}.$$

Но $\overrightarrow{OC'} = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, а $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Внося эти значения в последнее равенство, получим (3.3):

$$\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Аналогично доказываются и первые два свойства.

3. Деление вектора на число. Частным от деления вектора на число λ, отличное от нуля, называется произведение вектора на число, обратное данному, т. е. на число $\frac{1}{\lambda}$.

4. Единичные векторы. Разделим вектор на его модуль:

$$\frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{1}{a}\mathbf{a}.$$

Очевидно, что модуль полученного вектора равен единице, не имеющей размерности. Действительно, из определения модуля произведения имеем

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{a}\right| = \left|\frac{1}{a}\right| \cdot |\mathbf{a}| = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Векторы, модули которых равны безразмерной единице, называются *единичными векторами* или *ортами*. Орт вектора $\mathbf{a}$ обозначается $\mathbf{a}^0$ и по направлению он совпадает с вектором $\mathbf{a}$ $\left(\text{число } \frac{1}{a} \text{ положительно}\right)$. По определению имеем

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{a}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0, \tag{3.4}$$

причем $|\mathbf{a}^0| = 1$.

5. Орт оси. Направление любой оси в пространстве удобно задать единичным вектором. Пусть, например, направление оси OL задано единичным вектором $\mathbf{e}$. Тогда любой вектор $\mathbf{a}$, *параллельный* оси OL, можно представить равенством

$$\mathbf{a} = \pm a\mathbf{e}, \tag{3.5}$$

где a — модуль вектора $\mathbf{a}$ и знак плюс берется в том случае, когда направление вектора $\mathbf{a}$ совпадает с направлением оси (т. е. с направлением ее орта $\mathbf{e}$), и знак минус, если вектор $\mathbf{a}$ направлен в противоположную сторону (рис. 17).

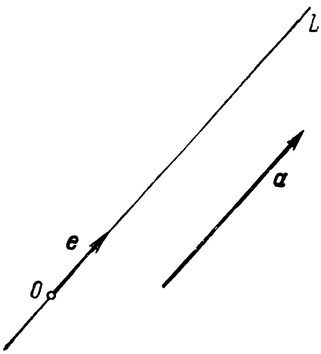

Рис. 17.

6. Коллинеарность двух векторов. Рассмотрим два коллинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Докажем, что между ними существует следующая зависимость:

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}, \tag{3.6}$$

где λ — некоторый скаляр. Действительно, пусть $\mathbf{b}^0$ — орт вектора $\mathbf{b}$. Тогда, учитывая, что вектор $\mathbf{a}$ параллелен $\mathbf{b}^0$, будем иметь на основании (3.5):

$$\mathbf{a} = \pm a\mathbf{b}^0.$$

С другой стороны, по определению орта,

$$\mathbf{b}^0 = \frac{1}{b}\mathbf{b}.$$

Отсюда

$$\mathbf{a} = \pm \frac{a}{b}\mathbf{b}.$$

Положив в этом равенстве $\pm \frac{a}{b} = \lambda$, получим (3.6). Естественно, что число λ в (3.6) для данных коллинеарных векторов единственно.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Задача разложения. В векторном исчислении и его приложениях большое значение имеет задача разложения, состоящая в представлении данного вектора в виде суммы нескольких векторов, называемых *составляющими* данного вектора. Эта задача, имеющая в общем случае бесчисленное множество решений, становится вполне определенной, если задать некоторые элементы составляющих векторов.

2. Примеры разложения. Рассмотрим несколько весьма часто встречающихся случаев разложения.

1. Разложить данный вектор **c** на два составляющих вектора **a** и **b**, из которых один, например **a**, задан по величине и направлению.

Задача сводится к определению разности двух векторов. Действительно, если векторы **a** и **b** являются составляющими вектора **c**, то должно выполняться равенство

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Отсюда определяется второй составляющий вектор **b**

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

2. Разложить данный вектор **c** на два составляющих, из которых один должен лежать в заданной плоскости π, а второй должен лежать на заданной прямой α.

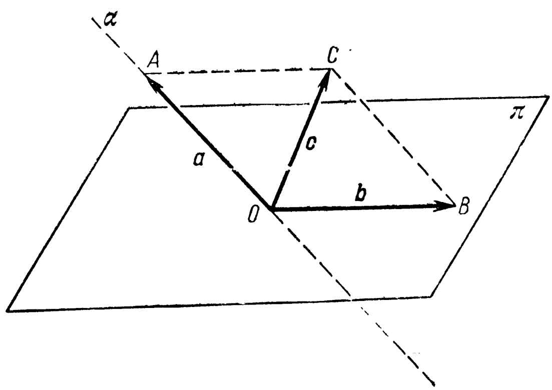

Рис. 18.

Для определения составляющих векторов **a** и **b** перенесем вектор **c** так, чтобы его начало совпало с точкой пересечения заданной прямой с плоскостью π (точка O — см. рис. 18). Из конца вектора **c** (точка C) проведем прямую $CB \| \alpha$ до пересечения с плоскостью π (B — точка пересечения), а затем из точки C проведем прямую CA параллельно OB. Векторы $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ будут искомыми, т. е. $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Естественно, что указанное разложение возможно, если прямая α и плоскость π не параллельны.

3. Даны три компланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, причем векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Требуется разложить вектор $\mathbf{c}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Приведем все три заданных вектора к одной точке O. Тогда в силу их компланарности они расположатся в одной плоскости. На данном векторе $\mathbf{c}$ как на диагонали построим параллелограмм, стороны которого параллельны линиям действия векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 19). Это построение всегда возможно (если только векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны) и единственно. Из рис. 19 видно, что

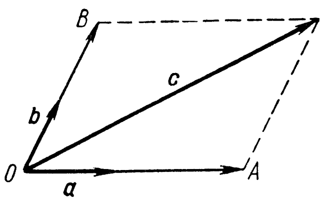

Рис. 19.

$$\mathbf{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

Но векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{a}$ по построению параллельны, следовательно, $\overrightarrow{OA}=\lambda\mathbf{a}$ (см. (3.6)), аналогично: $\overrightarrow{OB}=\mu\mathbf{b}$, где λ и μ — некоторые числа, называемые коэффициентами разложения. Внося полученные значения составляющих векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ в последнее равенство, получим:

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}. \tag{4.1}$$

Это выражение и определяет разложение вектора $\mathbf{c}$ по двум неколлинеарным векторам.

3. Разложение вектора по трем другим векторам. Покажем, что любой вектор $\mathbf{s}$ можно разложить по трем заданным некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Приведем векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{s}$ к одному началу (рис. 20) и на векторе $\mathbf{s}$ как на диагонали построим параллелепипед, ребра которого параллельны линиям действия векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Это построение единственно и всегда возможно, так как векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ по условию не лежат в одной плоскости.

Из рис. 20 видно, что

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

или

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_b + \mathbf{s}_c, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{s}_a = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{s}_b = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{s}_c = \overrightarrow{OC}$ —составляющие вектора $\mathbf{s}$ по $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ соответственно.

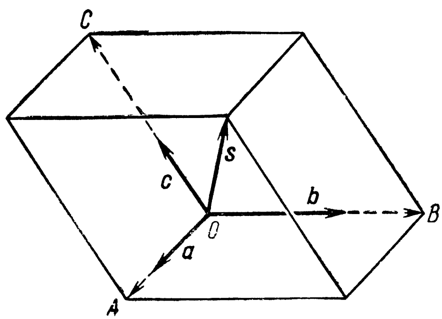

Рис. 20.

Но векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{s}_a$ и $\mathbf{a}$ параллельны, следовательно, $\mathbf{s}_a = \lambda\mathbf{a}$; аналогично: $\mathbf{s}_b = \mu\mathbf{b}$ и $\mathbf{s}_c = \nu\mathbf{c}$, где λ, μ, ν — некоторые числа, называемые *коэффициентами разложения.* Внося эти значения для векторов $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$, $\mathbf{s}_c$ в последнее равенство, получим

$$\mathbf{s} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}. \tag{4.3}$$

Это выражение и определяет разложение вектора $\mathbf{s}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

4. Разложение вектора по ортам базиса. Рассмотрим рис. 20 подробнее. Очевидно, что если вектор $\mathbf{s}$ задан, то его составляющие $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ зависят только от линий действия векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и не зависят от их модулей. Поэтому при разложении вектора $\mathbf{s}$ целесообразно задавать не векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, а только линии их действия, которые можно определять тремя ортами. Обозначим через $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ единичные векторы, определяющие три не лежащих в одной плоскости направления. Тогда на основании (4.3) можно написать

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + s_3\mathbf{e}_3. \tag{4.4}$$

Коэффициенты разложения s_1, s_2 и s_3 в (4.4) имеют простое значение — абсолютная величина каждого из них равна модулю соответствующей составляющей. Действительно,

$$\mathbf{s}_1 = s_1\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{s}_2 = s_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{s}_3 = s_3\mathbf{e}_3;$$

отсюда, учитывая, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — единичные, получим

$$|s_k| = |\mathbf{s}_k| \qquad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

т. е. *абсолютная величина коэффициента разложения равна модулю соответствующей составляющей.*

Совокупность трех единичных некомпланарных векторов, приведенных к одному началу, называется *базисом.* Таким образом, формула (4.4) определяет разложение вектора по ортам базиса. Коэффициенты s_1, s_2 и s_3 называются координатами вектора в данном базисе.

§ 5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

1. Основные определения. Рассмотрим n векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ и n чисел α_1, α_2, ..., α_n. Сумма произведений этих чисел на соответствующие векторы

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n$$

называется *линейной комбинацией векторов.*

Если для векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ существует n таких чисел α_1, α_2, ..., α_n, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что линейная комбинация векторов равна нулю, то данные векторы называются *линейно зависимыми.* В противном случае векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ называются *линейно независимыми.*

Прежде всего заметим, что *если среди векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ *имеется хотя бы один нулевой вектор, то данная система векторов будет линейно зависима.*

Действительно, пусть, например, вектор $\mathbf{a}_n = 0$. Тогда можно выбрать такую систему чисел $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n \neq 0$, что

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} + \alpha_n\mathbf{a}_n = 0$$

(первые $n-1$ слагаемых равны нулю в силу выбора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, а последнее равно нулю, так как $\mathbf{a}_n=0$). Таким образом, линейная комбинация векторов равна нулю, несмотря на то, что среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеется одно число α_n, не равное нулю, т. е. система линейно зависима.

На основании доказанного можно утверждать, что *в системе линейно независимых векторов нет нулевых.*

2. Условие коллинеарности двух векторов. Теорема. *Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.*

Достаточность. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. Это означает, что имеются такие два не равных одновременно нулю числа α и β, для которых справедливо равенство

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=0.$$

Пусть, например, $\alpha\neq 0$. Тогда это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b}$$

или

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b},$$

где $\lambda=-\frac{\beta}{\alpha}$. Из этого следует, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны (на основании определения умножения вектора на число).

Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда на основании (3.6) между ними существует зависимость $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$, или $\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}=0$. Положив теперь $\alpha=1$ и $\beta=-\lambda$, получим: $1\cdot\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=0$, т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы.

Следствие. *Если известно, что векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *не коллинеарны, то равенство*

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=0$$

возможно только в том случае, когда оба числа α *и* β *одновременно равны нулю.*

3. Условие компланарности трех векторов. Теорема. *Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.*

Достаточность. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Это означает, что будет справедливо равенство

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=0,$$

причем среди чисел α, β и γ имеется хотя бы одно, не равное нулю. Пусть, например, это будет γ. Тогда последнее равенство можно переписать так:

$$\mathbf{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a}-\frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b}$$

или

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},$$

где $\lambda=-\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\mu=-\frac{\beta}{\gamma}$. Это равенство означает, что вектор $\mathbf{c}$ совпадает по величине и направлению с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\mathbf{a}$ и $\mu\mathbf{b}$, т. е. вектор $\mathbf{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не параллельны. Тогда на основании теоремы разложения вектор $\mathbf{c}$ можно выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. (4.1)):

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$$

или $\lambda\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+(-1)\mathbf{c}=0$. Так как $(-1)\neq 0$, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

Пусть теперь векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда на основании теоремы п. 2 они будут линейно зависимы, т. е. будет справедливо равенство $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=0$, где среди чисел α и β по крайней мере одно не равно нулю. Но тогда будет справедливо и такое равенство

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+0\cdot\mathbf{c}=0,$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

Следствие. *Если известно, что три вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *не компланарны, то равенство*

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=0$$

возможно только в том случае, если все три числа α, β *и* γ *равны нулю.*

4. Линейная зависимость четырех векторов. Покажем, что *между любыми четырьмя векторами* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *и* $\mathbf{s}$

трехмерного евклидова пространства существует линейная зависимость.

Действительно, если векторы **a**, **b** и **c** компланарны, то на основании теоремы п. 3 они линейно зависимы, т. е. справедливо равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = 0,$$

где хотя бы одно из чисел α, β и γ не равно нулю. Но тогда будет справедливо и такое равенство:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} + 0 \cdot \mathbf{s} = 0,$$

что доказывает линейную зависимость четырех векторов **a**, **b**, **c** и **s**. Если же векторы **a**, **b** и **c** не компланарны, то вектор **s** можно всегда разложить по этим трем векторам (см. (4.3)):

$$\mathbf{s} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$$

или

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c} + (-1) \mathbf{s} = 0.$$

Так как $(-1) \neq 0$, то векторы **a**, **b**, **c** и **s** линейно зависимы.

Следствия теорем позволяют дать другое доказательство единственности разложений (4.1) и (4.3). Действительно, рассмотрим для примера разложение (4.3)

$$\mathbf{s} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$$

и предположим, что существует второе разложение вектора **s** по тем же некомпланарным векторам **a**, **b** и **c**

$$\mathbf{s} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b} + \nu' \mathbf{c},$$

где λ', μ' и ν' — некоторые числа. Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$(\lambda - \lambda') \mathbf{a} + (\mu - \mu') \mathbf{b} + (\nu - \nu') \mathbf{c} = 0.$$

Так как векторы **a**, **b** и **c** по условию не компланарны, то это равенство возможно только в том случае, если

$$\lambda - \lambda' = 0,$$

$$\mu - \mu' = 0,$$

$$\nu - \nu' = 0,$$

т. е. $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$ и $\nu = \nu'$, что доказывает единственность разложения.

§ 6. ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА

1. Составляющие вектора по прямой и плоскости. Как известно, проекцией точки на прямую или плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую (плоскость). Так, на рис. 21 (*а* и *б*) проекциями начала A и конца B вектора $\overrightarrow{AB}$ являются точки

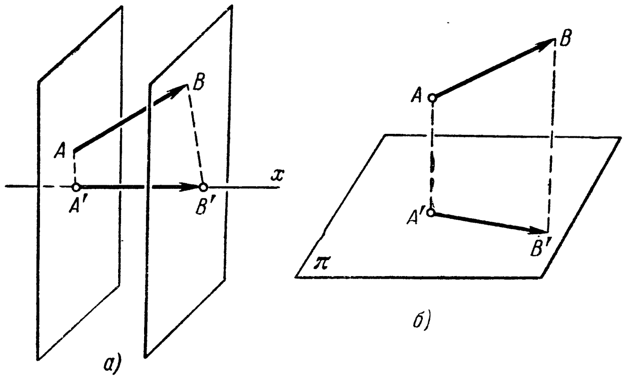

Рис. 21.

A' и B' соответственно (для построения проекции точки на прямую проводим через точку плоскость, перпендикулярную к прямой — пересечение плоскости и прямой определяет искомую проекцию).

Ортогональной составляющей вектора по прямой (плоскости) называется новый вектор, лежащий на данной прямой (плоскости), начало и конец которого совпадают соответственно с проекциями начала и конца вектора. На рис. 21, *а* вектор $\overrightarrow{A'B'}$ является ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ по прямой x, а на рис. 21, *б* вектор $\overrightarrow{A'B'}$ является ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ по плоскости π. Обозначается ортогональная составляющая вектора (в дальнейшем будем говорить просто составляющая) тем же символом, что и данный вектор, но внизу ставится соответствующий значок. Так, составляющая вектора $\mathbf{a}$ по прямой x обозначается $\mathbf{a}_x$, а составляющая вектора $\mathbf{a}$ по плоскости π обозначается $\mathbf{a}_\pi$.

2. Свойства составляющих вектора. Составляющие вектора по прямой (плоскости) обладают следующими свойствами:

1. Составляющая вектора по прямой (плоскости) не изменяется от параллельного переноса вектора или прямой (плоскости). Не останавливаясь на доказательстве этого очевидного свойства, заметим только, что при параллельном переносе вектора его составляющая по прямой (плоскости), не меняясь по величине и направлению, перемещается по прямой (плоскости).

2. Составляющая по прямой (плоскости) суммы векторов равна сумме соответствующих составляющих слагаемых векторов.

Действительно, рассмотрим сумму двух векторов $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 22). Так как треугольник ABC проектируется

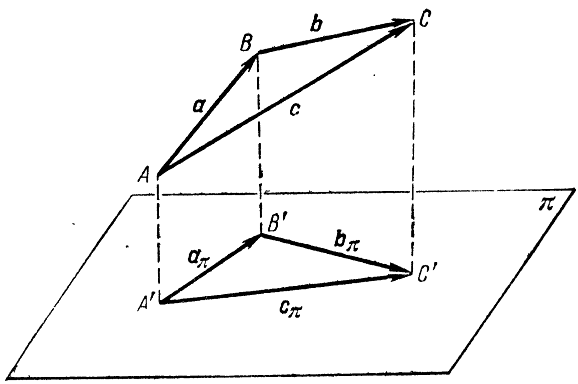

Рис. 22.

на плоскость в треугольник $A'B'C'$, то из равенства

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

следует

$$\mathbf{c}_\pi = \mathbf{a}_\pi + \mathbf{b}_\pi.$$

Внося в левую часть последнего равенства значение вектора $\mathbf{c}$, из предыдущего будем иметь:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_\pi = \mathbf{a}_\pi + \mathbf{b}_\pi. \tag{6.1}$$

Естественно, что это свойство можно распространить на любое число слагаемых

$$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n)_\pi=\mathbf{a}_{1\pi}+\mathbf{a}_{2\pi}+\ldots+\mathbf{a}_{n\pi}. \qquad (6.2)$$

3. При умножении вектора на число его составляющая по прямой (плоскости) умножается на то же число (доказательство следует непосредственно из определений произведения вектора на число и составляющей вектора по прямой или плоскости)

$$(\lambda\mathbf{a})_\pi=\lambda\mathbf{a}_\pi. \qquad (6.3)$$

Объединяя (6.2) и (6.3), получим для любой линейной комбинации векторов соотношение

$$(\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n)_\pi=\lambda_1\mathbf{a}_{1\pi}+\ldots+\lambda_n\mathbf{a}_{n\pi}. \qquad (6.4)$$

4. Составляющая вектора по прямой (плоскости) равна нулю (нуль-вектору), если вектор перпендикулярен к прямой (плоскости).

Если прямая, на которой строится составляющая вектора, является осью (т. е. на ней указано начало и направление),

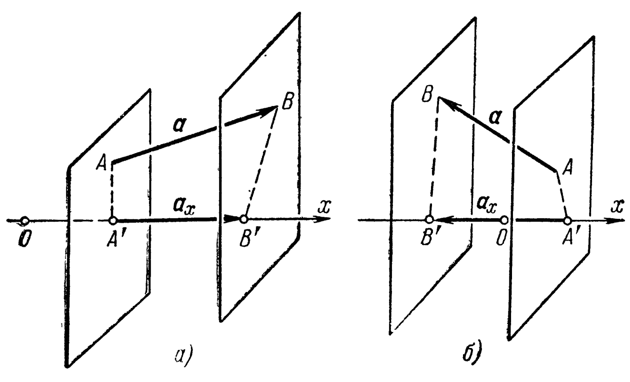

Рис. 23.

то говорят о составляющей вектора по оси. Направление составляющей вектора по оси может совпадать с направлением оси (рис. 23, *а*), а может быть и противоположно (рис. 23, *б*).

3. Проекция вектора на ось. *Проекцией вектора на ось* называется скаляр (число) *), равный по величине модулю составляющей вектора на ту же ось, причем это число берется со знаком плюс, если направление составляющей вектора совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если эти направления противоположны. Читатель, впервые знакомящийся с этими понятиями, должен твердо усвоить, что проекция вектора на ось есть число, а составляющая — вектор. Проекция вектора на ось обозначается тем же символом, что и соответствующая составляющая, только набирается обычным шрифтом. Так, проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось x обозначается a_x. Иногда проекция на ось обозначается следующим образом:

$$\text{Пр}_x\mathbf{a}$$

(сокращенное слово «проекция», затем стоит проектируемый вектор, а внизу — ось проекции).

Из определения проекции вектора на ось имеем

$$a_x = \pm|\mathbf{a}_x|, \tag{6.5}$$

где знак плюс берется, если направление составляющей вектора $\mathbf{a}_x$ совпадает с направлением оси, а знак минус — если эти направления противоположны.

4. Свойства проекций. Проекции вектора на ось обладают следующими очевидными свойствами.

1. Проекция вектора на ось не изменяется от параллельного переноса вектора или оси проекций.

2. Проекция на ось суммы векторов равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось, т. е.

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n)_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx}. \tag{6.6}$$

3. При умножении вектора на число его проекция на ось умножается на то же число, т. е.

$$(\lambda\mathbf{a})_x = \lambda a_x. \tag{6.7}$$

Из свойств 2 и 3 получим для любой линейной комбинации векторов:

$$(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n)_x = \lambda_1 a_{1x} + \ldots + \lambda_n a_{nx}. \tag{6.8}$$

---

*) В более точном значении этого слова проекция вектора на ось представляет *псевдоскаляр*, или *скаляр второго рода* — см. п. 8 § 6.

4. Проекция вектора на ось равна нулю, если вектор перпендикулярен к оси.

5. Составляющая вектора по любой оси всегда равна произведению проекции вектора на орт той же оси, т. е. если $\mathbf{i}$ — орт оси x, то

$$\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}, \tag{6.9}$$

причем эта формула охватывает оба возможных случая направления составляющей $\mathbf{a}_x$.

Доказательство первых четырех свойств вытекает из определения проекции и соответствующих свойств для составляющих вектора по оси, а доказательство пятого свойства непосредственно следует из определения произведения вектора $\mathbf{i}$ на число a_x и правила знаков проекции.

5. Угол между векторами. Условимся в следующем определении: *углом между двумя векторами* называется *наименьший* угол между направлениями векторов, приведенных к одному началу. В общем случае ввиду отсутствия ориентировки в пространстве этому углу нельзя придать направления отсчета, поэтому он считается всегда положительным. Очевидно, что этот угол может изменяться в пределах от 0 до π, причем он равен нулю, если векторы коллинеарны и направлены в одну сторону, и π, если векторы коллинеарны и направлены в противоположные стороны. Это же определение распространяется на угол между вектором и осью и на угол между двумя осями.

В тех случаях, когда векторы лежат в одной плоскости и установлена *ориентировка*, т. е. указано, с какой *стороны* наблюдается плоскость, то можно говорить о *направлении* отсчета угла и его знаке. В этом случае угол α считается в правой системе (см. п. 1 § 7) положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Очевидно, что

$$\widehat{\mathbf{ab}} = -\widehat{\mathbf{ba}}.$$

Заметим, что если векторы лежат в одной из координатных плоскостей (например, xz), то они наблюдаются всегда со стороны положительного направления третьей оси (y).

6. Вычисление проекций вектора. Обозначим через α угол между вектором и осью проекции и перенесем вектор так, чтобы его начало совпало с какой-нибудь точкой оси. Если направления составляющей вектора $\mathbf{a}_x$ и оси одинаковы, то угол α будет острым и, как видно из рис. 24, *а*,

$$a_x = |\mathbf{a}_x| = a\cos\alpha,$$

где a — модуль вектора $\mathbf{a}$. Если же направления вектора $\mathbf{a}_x$ и оси противоположны, то, учитывая знак проекции, будем иметь (см. рис. 24, *б*)

$$a_x = -|\mathbf{a}_x| = -a\cos(\pi - \alpha) = a\cos\alpha,$$

т. е. предыдущее выражение (нужно помнить, что в данном случае угол α тупой и $\cos\alpha < 0$).

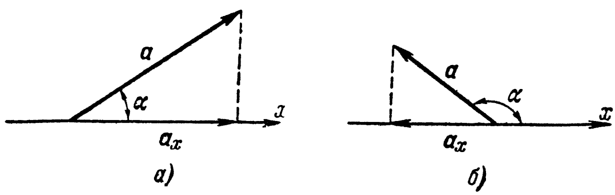

Рис. 24.

Таким образом, ***проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью***:

$$a_x = a\cos\alpha. \tag{6.10}$$

Кроме этой имеющей исключительно важное значение формулы, для проекции вектора на ось можно дать еще одну очень простую формулу. Установим на оси начало отсчета и выберем масштаб, общий с масштабом векторов. Как известно, координатой точки называется число, выражающее в выбранном масштабе расстояние от начала отсчета оси до проекции данной точки на ось, причем это число берется со знаком плюс, если проекция точки удалена от начала отсчета в сторону направления оси, и со знаком минус в противном случае. Так, например, координатой точки A (рис. 23, *б*) будет взятое со знаком $+$ число, выражающее длину отрезка OA', а координатой точки B будет взятое со знаком $-$ число, определяющее длину отрезка OB' (мы не останавливаемся на этом подробнее, считая, что читатель знаком с понятием координат точки из курса элементарной математики).

Обозначим через x_1 координату начала, а через x_2 координату конца вектора на ось x. Тогда, как видно из рис. 23, *а*, будем иметь

$$x_1 = OA', \quad x_2 = OB'.$$

Проекция вектора на ось x будет равна

$$a_x = A'B' = OB' - OA'$$

или, учитывая предыдущие равенства,

$$a_x = x_2 - x_1. \tag{6.11}$$

Легко видеть, что эта формула имеет общий характер и не зависит от расположения вектора относительно оси и начала отсчета. Действительно, рассмотрим случай, изображённый на рис. 23, *б*. Из определения координат точек и проекции вектора последовательно получим

$$x_1 = OA', \quad x_2 = -B'O,$$

$$a_x = -B'A' = -(B'O + OA') = -B'O - OA' = x_2 - x_1$$

(читатель легко проверит справедливость формулы (6.11) и при другом расположении вектора относительно оси и начала отсчета).

Из (6.11) следует, что *проекция вектора на ось равна разности координат конца и начала вектора.*

Вычисление проекции вектора на ось встречается весьма часто в самых различных вопросах. Поэтому необходимо выработать твердые навыки вычисления проекций. Можно указать некоторые приемы, облегчающие процесс вычисления проекций.

1. Знак проекции вектора на ось, как правило, можно определить непосредственно из чертежа, а модуль проекции $|a_x|$ можно вычислить по формуле

$$|a_x| = a\cos\alpha_1,$$

где α_1 — о с т р ы й угол между вектором и осью проекций $\left(\alpha_1 = \alpha, \text{ если } \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ и } \alpha_1 = \pi - \alpha, \text{ если } \alpha > \frac{\pi}{2}\right)$. Этом прием, не внося ничего принципиально нового, несколько облегчает вычисление проекции, так как не требует тригонометрических преобразований.

2. Если требуется определить проекции вектора на две взаимно-перпендикулярные оси x и y (предполагается, что вектор лежит в плоскости этих осей) и α_1 — острый угол между вектором и осью x, то

$$|a_x| = a\cos\alpha_1,$$

$$|a_y| = a\sin\alpha_1$$

(знак проекций определяется из чертежа).

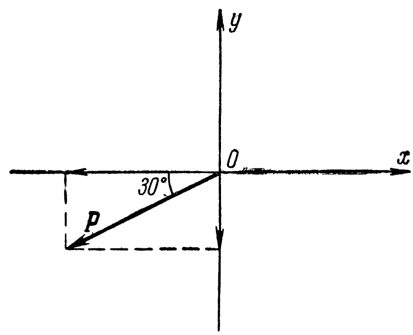

Рис. 25.

Пример. Найти проекции на оси координат x и y силы **P** ($P = 10$ *кГ*), изображенной на рис. 25. Из чертежа видно, что обе проекции будут отрицательны. Следовательно,

$$P_x = -10\cdot\cos 30^\circ\ кГ = -10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ кГ = -5\sqrt{3}\ кГ,$$

$$P_y = -10\cdot\sin 30^\circ\ кГ = -10\cdot\frac{1}{2}\ кГ = -5\ кГ.$$

3. Иногда применяется правило *двойного проектирования*, состоящее в следующем. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось AC, лежащая в плоскости π. Опустим из конца вектора $\overrightarrow{AB}$ перпендикуляры на плоскость π и прямую AC и соединим затем основания перпендикуляров отрезком прямой линии OC (рис. 26). Обозначим угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и плоскостью π через ϑ, угол между AO и AC через ψ и угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью проекций AC через α. Так как угол BCA прямой (по построению), то

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Из треугольников OAC и OAB имеем

$$\cos\psi = \frac{AC}{AO}, \qquad \cos\vartheta = \frac{AO}{AB}.$$

Отсюда

$$\frac{AC}{AB} = \cos\psi\cos\vartheta,$$

или, сравнивая с выражением для $\cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \cos\psi\cos\vartheta. \tag{6.12}$$

Пользуясь равенством (6.10), получим

$$\text{Пр}_{AC}\overrightarrow{AB} = (AB\cos\vartheta)\cos\psi.$$

Это равенство можно прочитать следующим образом:

Для того чтобы получить проекцию вектора на ось, достаточно спроектировать вектор на плоскость,

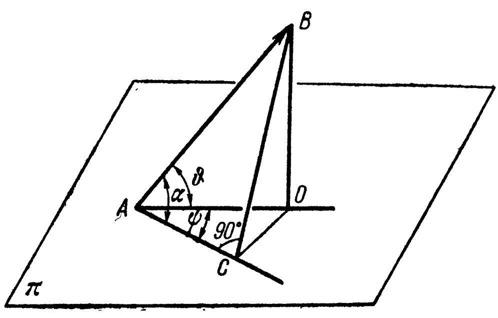

Рис. 26.

в которой лежит ось проекции, а затем полученную составляющую по плоскости спроектировать на данную ось (правило двойного проектирования). Естественно, что при вычислении проекции можно пользоваться просто формулой (6.12), а затем (6.10), но правило двойного проектирования легче запоминается, и оно весьма удобно при решении конкретных задач.

7. Теорема о проекции суммы векторов. При установлении свойств проекций вектора было показано, что проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов. Это было обосновано простыми геометрическими соображениями для составляющей суммы по оси. Ввиду фундаментальной важности этой теоремы, приведем для нее другое доказательство.

Пусть дано n векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Построим многоугольник векторов и замыкающий вектор $\mathbf{s}$ (сумму векторов). Обозначим начало первого вектора A_1, его конец — A_2, конец второго вектора — A_3 (начало второго вектора A_2) и т. д., конец последнего вектора A_{n+1}. Тогда начало суммы векторов s будет в точке A_1, а конец в A_{n+1} (по определению суммы векторов). Проведем произвольную ось x и

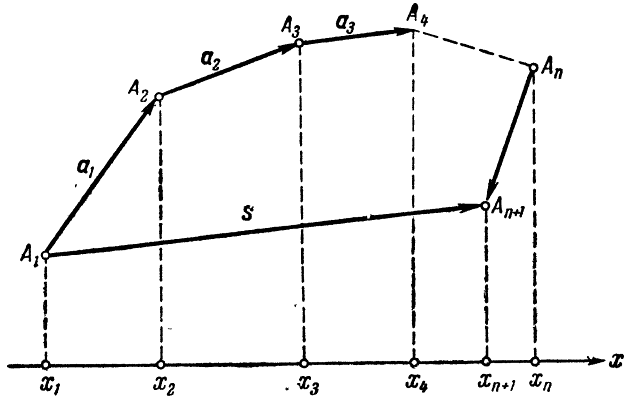

Рис. 27.

обозначим через x_1 координату точки A_1, через x_2 координату точки A_2 и т. д. (рис. 27). Учитывая, что проекция вектора на ось равна разности координат конца и начала (см. (6.11)), получим следующее выражение для проекции замыкающего вектора $\mathbf{s}$ (суммы векторов)

$$s_x = x_{n+1} - x_1.$$

С другой стороны, для проекций составляющих векторов на основании того же правила будем иметь:

$$
\begin{aligned}
a_{1x} &= x_2 - x_1, \\
a_{2x} &= x_3 - x_2, \\
a_{3x} &= x_4 - x_3, \\
&\cdots\cdots \\
a_{nx} &= x_{n+1} - x_n.
\end{aligned}
$$

Сложим правые и левые части этих равенств

$$a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx} = x_{n+1} - x_1$$

(все остальные члены попарно уничтожаются). Сравнивая с выражением для s_x, получим

$$s_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx}, \tag{6.13}$$

что и доказывает теорему.

8. Псевдоскаляры. Рассматривая величины, которые для своей характеристики требуют знания одного вещественного числа, легко заметить, что некоторые из них в силу своей природы не связаны с какой-либо координатной системой. К ним относятся объем тела, масса, температура, коэффициент трения и т. п. Такие величины называются *скалярами первого рода*, или просто скалярами.

Наряду со скалярами первого рода имеется большое число величин, которые хотя и характеризуются одним вещественным числом, но непосредственно связаны с выбранной системой координат. К таким величинам относятся моменты инерции, статические моменты, координаты точки, проекции вектора и т. п. Для того чтобы не смешивать природу этих величин с природой скаляров в собственном смысле этого слова, их называют *скалярами второго рода*, или *псевдоскалярами*.

Однако учитывая, что математические действия над скалярами и псевдоскалярами подчиняются одним и тем же законам, мы в дальнейшем для простоты под словом «скаляр» будем понимать скалярные величины как первого, так и второго рода.

§ 7. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ВЕКТОРА

1. Правая и левая системы. Три некомпланарных, приведенных к одному началу вектора называются *репером*. Порядок циклического перехода векторов репера определяется порядком их написания. Так в репере **a**, **b**, **c** за вектором **a** следует вектор **b**, за ним вектор **c**, а за **c** снова **a** и т. д. (обычно порядок написания, а тем самым и порядок циклической перестановки определяется алфавитом).

Выберем в репере **a**, **b**, **c** один вектор, например **c**, и будем смотреть на два других вектора (в данном случае на **a** и **b**) со стороны направления выбранного вектора (**c**). Переход вращением на кратчайший угол от вектора **a** к вектору **b** (в указанном порядке) виден на репере, изображенном на рис. 28, *а*, против хода часовой стрелки, а на репере рис. 28, *б* — по часовой стрелке. Первый репер называется *правым*, а второй — *левым*. Эти названия связаны

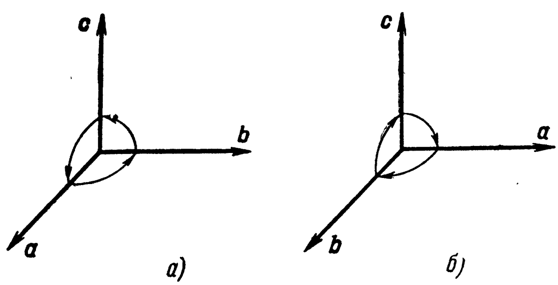

Рис. 28.

с тем, что если большой, указательный и средний пальцы изображают векторы, то на правой руке им соответствует правый репер, а на левой руке — левый.

Аналогичные определения существуют и для прямоугольной системы координат x, y, z. Здесь порядок перехода осей устанавливается порядком этих букв в алфавите ($x \to y \to z \to x \to \ldots$) и различают правую и левую системы координат. Как правило, во всех современных курсах применяется правая система, но иногда прибегают и к левой системе (в данном руководстве принята правая система).

2. Естественный способ задания свободного вектора. Естественный способ основан на определении вектора. Сущность его состоит в том, что непосредственно задаются все элементы вектора: точка приложения (для несвободного вектора), линия действия, сторона действия и модуль. Это делается простым описанием (например, к свободному концу балки приложена сила в 10 *кГ*, направленная вертикально вниз, и т. п.). Такой способ задания векторных величин удобен иногда в приложениях, но он страдает отсутствием общности. Чтобы избежать этого, вводят систему координат, относительно которой ориентируют вектор, и все элементы вектора определяют числами.

Рассмотрим прежде всего методы задания направления. Приведем вектор к началу прямоугольной системы координат (рассматривается свободный вектор) и возьмем на нем любую точку A, так что вектор оказывается направленным от O к A (рис. 29). Опустим из точки A на плоскость xy

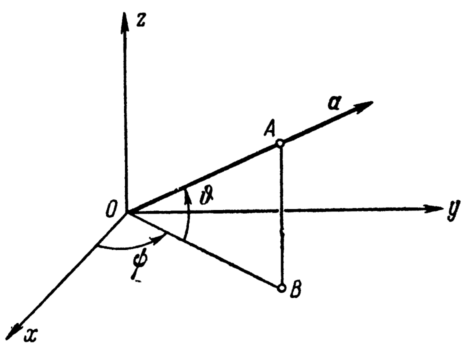

Рис. 29.

перпендикуляр, который пересечет ее в точке B, и проведем прямую OB. Угол между прямой OA и плоскостью xy ($\angle AOB$) обозначим ϑ и будем отсчитывать его от плоскости xy до прямой OA, считая ϑ положительным, если прямая OA составляет острый угол с положительным направлением оси z, и отрицательным, если прямая OA составляет острый угол с отрицательным направлением оси z; в этих условиях угол ϑ может меняться в пределах от $-\frac{\pi}{2}$

до $\frac{\pi}{2}$. Положение прямой OB в плоскости xy вполне определяется углом ψ, который отсчитывается от оси x до OB в положительном направлении (угол ψ меняется от 0 до 2π). Очевидно, что два угла ψ и ϑ вполне определяют направление вектора (заметим, что угол ψ называется иногда *азимутом*, а ϑ — *углом цели*).

Однако направление вектора чаще всего задают с помощью трех углов α, β и γ — углов между вектором и осями x, y, z соответственно (рис. 30).

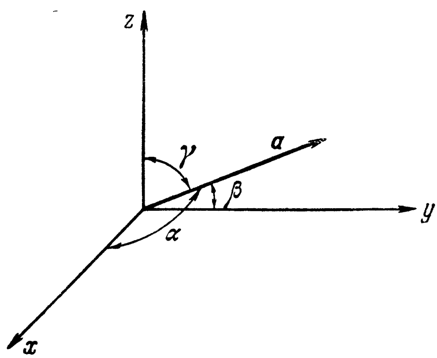

Рис. 30.

Эти углы называются *направляющими углами* вектора и они отсчитываются так, как об этом сказано в начале п. 5 § 6 (стр. 36). Как правило, рассматривают не сами углы α, β и γ, а их косинусы, которые называются *направляющими косинусами вектора*.

Установим связь между направляющими углами α, β и γ и углами ψ и ϑ. Для этого достаточно учесть, что угол между проекцией вектора на плоскость xy и осью y равен $\frac{\pi}{2} - \psi$, а угол между осью z и вектором равен $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ (см. рис. 29). Тогда на основании формулы (6.12) будем иметь:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\psi\cos\vartheta, \\ \cos\beta &= \sin\psi\cos\vartheta, \\ \cos\gamma &= \sin\vartheta. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Так как направление вектора вполне определяется двумя углами ψ и ϑ, то между тремя направляющими углами α, β и γ должна существовать зависимость. Последняя устанавливается весьма просто. Возведем правые и левые части равенств (7.1) в квадрат и сложим их почленно

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\psi\cos^2\vartheta+\sin^2\psi\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta.$$

Легко видеть, что правая часть этого равенства равна единице. Действительно, объединяя первые два члена и учитывая известную формулу тригонометрии ($\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$), последовательно получим

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(\cos^2\psi+\sin^2\psi)\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=$$
$$=\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=1.$$

Таким образом, между направляющими углами α, β и γ имеется следующая зависимость:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{7.2}$$

и из трех углов α, β и γ независимы только два.

Для полного определения вектора остается задать его модуль. Поэтому при естественном способе свободный вектор может быть задан скалярными величинами одним из следующих способов:

1) азимутом ψ, углом цели ϑ и модулем вектора a;

2) направляющими углами α, β и γ и модулем вектора a, причем из трех углов α, β и γ независимых только два.

Пример 1. Вектор составляет с осью x угол в 60° и с осью y угол в 45°. Определить, какой угол он составляет с осью z.

В данном примере $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Подставляя в (7.2), будем иметь:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1.$$

Отсюда $\cos^2\gamma=\frac{1}{4}$, $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$ и, следовательно, $\gamma_1=60°$ и $\gamma_2=120°$.

Пример 2. Вектор составляет с осями координат равные углы. Определить их.

В этом случае $\alpha=\beta=\gamma$. Подставляя в (7.2), получим

$$3\cos^2\alpha=1, \quad \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha_1=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ т. е. } \alpha_1\approx 54^\circ 44'; \quad \alpha_2=180^\circ-\alpha_1.$$

Пример 3. Может ли вектор составлять с осью x угол в 30°, а с осью z угол в 45°?

Нет, не может, так как в этом случае мы имели бы: $\alpha=30^\circ$,

$$\gamma=45^\circ, \ \cos^2\alpha+\cos^2\gamma=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}>1,$$

что невозможно.

3. Задание свободного вектора с помощью его проекций (координатный метод). Естественный способ задания вектора обладает важным свойством: дает непосредственное, естественно вытекающее из определения представление о векторе. Но этот метод неудобен при различных математических преобразованиях; бо́льшие удобства представляет задание вектора через его проекции на оси прямоугольной системы координат.

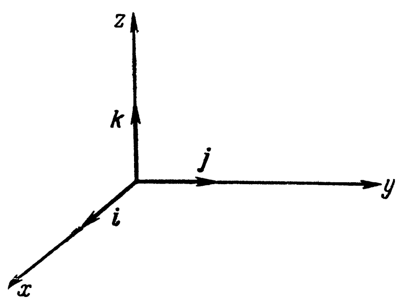

Рис. 31.

Рассмотрим свободный вектор **a** и разложим его по трем направлениям x, y, z (см. (4.2)):

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y+\mathbf{a}_z, \quad (7.3)$$

где $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ и $\mathbf{a}_z$ — составляющие вектора **a** по осям x, y и z соответственно.

Обозначим через **i**, **j**, **k** орты осей x, y, z соответственнно (рис. 31). Тогда на основании (6.9) будем иметь:

$$\mathbf{a}_x=a_x\mathbf{i},$$
$$\mathbf{a}_y=a_y\mathbf{j},$$
$$\mathbf{a}_z=a_z\mathbf{k},$$

где a_x, a_y и a_z — проекции вектора **a** на оси x, y, z.

Внося эти выражения для составляющих вектора в (7.3), получим формулу разложения вектора по координатным ортам:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \qquad (7.4)$$

Это разложение является единственным и, следовательно, три проекции a_x, a_y и a_z однозначно определяют вектор (с точностью до начальной точки).

Формула (7.4) является исключительно важной — она показывает, что *коэффициенты в разложении вектора по координатным ортам являются проекциями вектора на соответствующие оси.*

Рассмотрим два элементарных примера.

Пример 1. Даны проекции вектора на оси координат:

$$a_x = 3, \quad a_y = -5, \quad a_z = 7.$$

Разложить этот вектор по координатным ортам.

Подставляя значения проекций вектора в (7.4), получим:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Пример 2. Дано разложение вектора по координатным ортам

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}.$$

Определить его проекции на оси координат. Сравнивая с (7.4), будем иметь:

$$a_x = 2, \quad a_y = 0, \quad a_z = -1$$

(так как проекция вектора на ось y равна нулю, то вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен к оси y).

Пусть в пространстве дана точка M. Положение этой точки можно определить либо ее прямоугольными координатами x, y и z (рис. 32), либо радиусом-вектором $\mathbf{r}$, т. е. вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой M. Очевидно, что проекции радиуса-вектора на оси координат равны соответствующим координатам точки, так что (см. рис. 32):

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \qquad (7.5)$$

Разложение радиуса-вектора по координатным ортам имеет вид:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \qquad (7.6)$$

Любой вектор **a**, приведенный к началу координат, можно рассматривать как радиус-вектор своего конца. Поэтому проекции вектора a_x, a_y, a_z часто называют координатами вектора и записывают это следующим образом:

$$\mathbf{a}\,(a_x,\ a_y,\ a_z)$$

(по аналогии с соответствующей записью координат точки).

Заметим, что начало радиуса-вектора точки строго определено, оно совпадает с началом координат. Естественно,

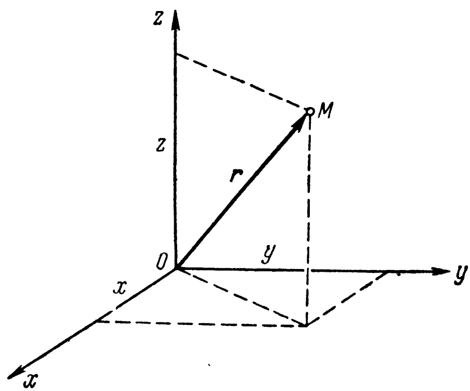

Рис. 32.

что положение точки в пространстве можно определить вектором, идущим из любой другой точки, но в этом случае его начало должно специально оговариваться.

4. Связь между естественным и координатным способами задания вектора. Предположим вначале, что вектор задан естественным способом с помощью направляющих углов α, β, γ и модуля вектора a. Проекции вектора немедленно определятся, если только воспользоваться равенством (6.10):

$$\begin{aligned} a_x &= a\cos\alpha, \\ a_y &= a\cos\beta, \\ a_z &= a\cos\gamma. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Значительно чаще приходится устанавливать обратную зависимость, а именно: зная проекции вектора, определить его модуль и направляющие углы или косинусы. Для этого возведем в квадрат левые и правые части равенств (7.7) и сложим почленно полученные выражения (общий множитель a^2 выносим за скобки):

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Но выражение, стоящее в скобках, равно единице; поэтому

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2.$$

Отсюда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{7.8}$$

т. е. *модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его проекций* (берется арифметическое значение корня).

Значения направляющих косинусов определятся теперь из (7.7):

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \tag{7.9}$$

Формулу (7.8) можно установить из геометрических соображений, не прибегая к зависимости (7.2). Для этого рассмотрим рис. 33. Модуль вектора **a** равен диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на составляющих $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$. Следовательно,

$$a = \sqrt{|\mathbf{a}_x|^2 + |\mathbf{a}_y|^2 + |\mathbf{a}_z|^2}$$

(квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его сторон).

Имеем также — см. (6.5):

$$|\mathbf{a}_x| = \pm a_x, \quad |\mathbf{a}_y| = \pm a_y, \quad |\mathbf{a}_z| = \pm a_z.$$

Внося эти значения для модулей составляющих вектора в последнее выражение, получим (7.8).

Установив справедливость выражения (7.8), легко получить теперь зависимость между направляющими косинусами (7.2). Для этого достаточно возвести в квадрат левые и правые части (7.9) и сложить полученные выражения:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$$
$$= \frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Пример. Проекции вектора на ось равны

$$a_x = 10, \quad a_y = -2, \quad a_z = 11.$$

Определить модуль вектора и его направляющие косинусы.

На основании (7.8) и (7.9) имеем:

$$a = \sqrt{10^2 + (-2)^2 + 11^2} = 15,$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{15}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{15}, \quad \cos\gamma = \frac{11}{15}.$$

5. Задание несвободного вектора. Прежде всего напомним, что составляющая вектора и его проекция не

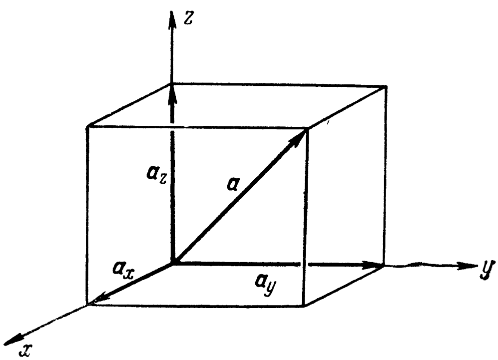

Рис. 33.

зависят от того, с какой точкой оси совпадает начало вектора — см. первые свойства составляющих и проекций вектора (стр. 33 и 35)). Поэтому все формулы, установленные в этом параграфе, справедливы не только для свободных, но и для связанных и скользящих векторов. Для задания несвободного вектора нужно к трем независимым величинам, определяющим модуль и направление вектора, добавить еще три скаляра, определяющих положение начальной точки вектора. Следовательно, связанный вектор определяется шестью независимыми скалярными величинами. Например, вектор **a**, начало которого совпадает с точкой A_0, имеющей координаты x_0, y_0, z_0, может быть задан числами

$$x_0, \ y_0, \ z_0, \ a_x, \ a_y, \ a_z.$$

Связанный вектор вполне определяется также своими началом и концом. Если A_1 — начало вектора, а A_2 — его конец, то вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ будет вполне определен, если будут известны точки A_1 и A_2. Последние можно задать своими радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, проекции которых равны соответствующим координатам точек A_1 и A_2. Из рис. 34 видно, что связанный вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ равен разности радиусов-векторов конца и начала:

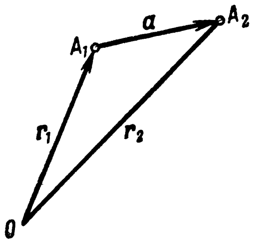

Рис. 34.

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{7.10}$$

6. Задание скользящего вектора. Скользящий вектор $\mathbf{a}$ может быть задан тремя своими проекциями a_x, a_y, a_z и какой-нибудь точкой на линии его действия. Так как точка задается тремя координатами, то скользящий вектор может быть задан шестью скалярными величинами x_0, y_0, z_0, a_x, a_y, a_z, причем из трех координат точки, лежащей на линии действия вектора, одну координату можно задать произвольно (точка на этой прямой может быть выбрана любая). Таким образом, скользящий вектор задается *пятью* независимыми скалярными величинами (о задании скользящего вектора см. подробнее в п. 5 § 13, стр 109).

7. Некоторые приложения. а) *Расстояние между двумя точками.* Пусть x_1, y_1 и z_1 — координаты точки A_1, а x_2, y_2, z_2 — координаты точки A_2. Так как проекции вектора на оси равны разности координат его конца и начала (см. (6.11)), то для вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ будем иметь

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Внося эти выражения в (7.8), получим значение модуля вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$, равное расстоянию d между двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{7.11}$$

б) *Условие коллинеарности двух векторов.* Пусть два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда между ними существует зависимость вида (см. (3.6))

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b},$$

где λ — некоторый скаляр.

Пользуясь свойством (6.7), будем иметь

$$a_x=\lambda b_x,$$
$$a_y=\lambda b_y,$$
$$a_z=\lambda b_z.$$

Отсюда

$$\frac{a_x}{b_x}=\lambda,\quad \frac{a_y}{b_y}=\lambda,\quad \frac{a_z}{b_z}=\lambda.$$

Так как правые части этих равенств одинаковы, то равны и левые части:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}, \tag{7.12}$$

т. е. *если векторы коллинеарны, то их проекции пропорциональны* (очевидно, справедливо и обратное утверждение).

в) Деление отрезка в данном отношении. Задание точки радиусом-вектором позволяет решить следующую важную задачу. Даны две точки $A_1(\mathbf{r}_1)$ и $A_2(\mathbf{r}_2)$ (даны их радиусы-векторы). На прямой A_1A_2 требуется найти точку $A(\mathbf{r})$, делящую отрезок A_1A_2 в заданном отношении $\frac{m_2}{m_1}$; иначе говоря, на отрезке A_1A_2 требуется найти такую точку (ее радиус-вектор), чтобы выполнялось равенство

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{m_2}{m_1}.$$

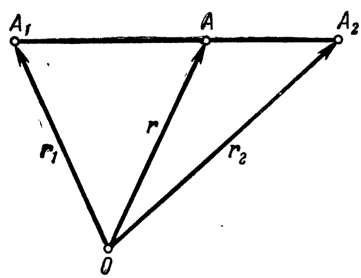

Рис. 35.

Составим векторы $\overrightarrow{A_1A}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ и $\overrightarrow{AA_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}$ (см. рис. 35). Эти векторы коллинеарны, и отношение их модулей равно $\frac{m_2}{m_1}$. Следовательно, на основании (3.6) будем иметь:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}).$$

Отсюда найдем радиус-вектор искомой точки:

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} \tag{7.13}$$

или

$$\mathbf{r}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}. \tag{7.14}$$

Это векторное равенство равносильно трем скалярным:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2},\quad z=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}. \tag{7.15}$$

Пример. Определить точку пересечения медиан треугольника, если известны его вершины $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$.

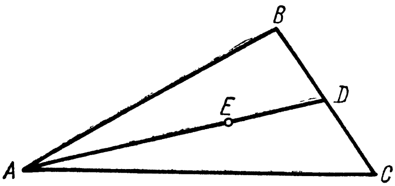

Рис. 36.

Медиана AD делит отрезок BC пополам (рис. 36); следовательно, $\frac{BD}{DC}=1$ и для точки D справедливо равенство

$$\mathbf{r}_D=\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{2}.$$

Точка пересечения медиан делит отрезок AD в отношении $2:1$, поэтому, согласно формуле (7.14),

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\frac{2}{1}\,\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{2}}{1+\frac{2}{1}}$$

или

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}.$$

§ 8. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

1. Определение скалярного произведения. Рассмотрим в пространстве два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и приведем их к общему началу. Пусть α — угол между этими векторами (см. начало п. 5 § 6, стр. 36). *Скалярным произведением* двух векторов называется скаляр (число), равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается скалярное произведение двух векторов следующим образом:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \text{(или просто } \mathbf{ab}\text{)};$$

в некоторых руководствах скалярное произведение обозначается круглыми скобками.

На основании определения будем иметь

$$\mathbf{ab} = ab\cos\alpha. \tag{8.1}$$

Это равенство можно написать в виде:

$$\mathbf{ab} = a\,(b\cos\alpha).$$

Произведение $b\cos\alpha$ равно проекции вектора $\mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{a}$, т. е. $b\cos\alpha = \text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ (рис. 37). Поэтому

$$\mathbf{ab} = a\cdot\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \tag{8.2}$$

или

$$\mathbf{ab} = b\cdot\text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \tag{8.2$'$}$$

Таким образом, *скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию второго вектора на направление первого.*

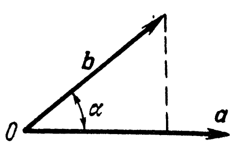

Рис. 37.

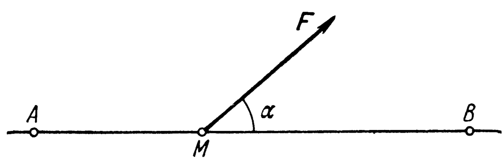

Рис. 38.

Скалярное произведение широко используется в физике. Остановимся на одном примере.

Пусть точка M проходит путь s по прямой от пункта A до пункта B. Предположим, что на точку действует сила $\mathbf{F}$ — постоянная по величине и направлению (рис. 38). Как известно из элементарного курса физики, работа силы $\mathbf{F}$ на участке AB будет равна:

$$A = F\cdot s\cdot\cos\alpha,$$

где α — угол между направлением движения точки и силой $\mathbf{F}$, Если ввести вектор перемещения $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB}$, то из выражения для работы и определения скалярного произведения двух векторов найдем, что *работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения*:

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

2. Свойства скалярного произведения. Следующие свойства скалярного произведения вытекают непосредственно из определения и формулы (8.1).

1. *Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов-сомножителей равен нулю, либо они взаимно перпендикулярны*. Таким образом, равенство

$$\mathbf{ab} = 0$$

не влечет за собой обязательного равенства нулю одного из векторов — оно возможно и при

$$\mathbf{a} \neq 0, \quad \mathbf{b} \neq 0, \text{ но } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

2. *Для того чтобы два не равных нулю вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.*

3. Скалярное произведение положительно, если угол между векторами острый, и отрицательно, если этот угол тупой.

Скалярным квадратом вектора называется скалярное произведение двух равных векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2.$$

4. *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля*:

$$\mathbf{a}^2 = a^2. \qquad (8.3)$$

Следствие. Скалярный квадрат единичного вектора равен единице.

На основании свойств 2 и 4 скалярные произведения координатных ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= 1, & \mathbf{ij} &= 0, \\ \mathbf{j}^2 &= 1, & \mathbf{jk} &= 0, \\ \mathbf{k}^2 &= 1, & \mathbf{ki} &= 0. \end{aligned} \qquad (8.4)$$

Как было уже замечено (первое свойство), из равенства нулю скалярного произведения еще не следует, что один из векторов-сомножителей равен нулю. Однако если известно, что равенство

$$\mathbf{ax} = 0 \tag{8.5}$$

выполняется при любом векторе $\mathbf{x}$, то можно утверждать, что вектор $\mathbf{a}$ равен нулю. Действительно, если предположить, что $\mathbf{a} \neq 0$, то можно взять такой вектор $\mathbf{x} \neq 0$, который составляет с вектором $\mathbf{a}$ угол, отличный от прямого (это можно сделать, так как вектор $\mathbf{x}$ — произвольный). При таком выборе вектора $\mathbf{x}$ скалярное произведение $\mathbf{ax} \neq 0$, что противоречит условию.

5. Переместительное свойство

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}. \tag{8.6}$$

Это свойство непосредственно вытекает из равенства (8.1) и определения угла между векторами.

6. Сочетательное свойство по отношению к числовому множителю

$$\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}), \tag{8.7}$$

что можно словами выразить следующим образом: вместо того, чтобы умножить скалярное произведение на число, достаточно умножить на это число один из векторов-сомножителей.

Доказательство. Согласно (8.2′) имеем:

$$\lambda(\mathbf{ab}) = \lambda b \cdot \text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a},$$

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = b \cdot \text{Пр}_{\mathbf{b}}(\lambda\mathbf{a}).$$

Но на основании (6.7)

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Следовательно,

$$(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = b\lambda\,\text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{ab}),$$

что и требовалось доказать.

7. Распределительное свойство

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \tag{8.8}$$

т. е. скалярное произведение вектора на сумму векторов равно сумме скалярных произведений данного вектора на слагаемые векторы.

Доказательство. На основании (8.2)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=a\cdot \text{Пр}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

но проекция суммы векторов равна сумме проекций, т. е. $\text{Пр}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$. Следовательно,

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=a(\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}).$$

Так как для чисел распределительное свойство справедливо, то

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=a\,\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+a\,\text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}. \tag{8.9}$$

Согласно (8.2)

$$a\cdot \text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\qquad a\cdot \text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Внося последние выражения в равенство (8.9), получим (8.8) *).

Естественно, что распределительное свойство скалярного произведения, доказанное для двух слагаемых векторов, справедливо и для любого числа слагаемых.

На основании сочетательного и распределительного свойств следует, что векторные многочлены можно скалярно перемножать, как обычные алгебраические многочлены, применяя, в частности, формулы сокращенного умножения. Приведем примеры.

Пример 1.

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{a}^2+6\mathbf{ba}-\mathbf{ab}-3\mathbf{b}^2=$$
$$=2a^2-3b^2+5\mathbf{ab}=2a^2-3b^2+5ab\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пример 2.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=a^2-b^2.$$

Пример 3.

$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})^2=a^2\pm 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+b^2.$$

---

*) Распределительное свойство скалярного произведения, доказывающееся необычайно просто с помощью свойств проекций, не является геометрически очевидным. Для читателя будет полезным дать геометрическую картину равенства (8.8).

Пример 4. Докажем теорему косинусов. Построим на сторонах треугольника ABC (рис. 39) векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$. Тогда вектор $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ будет равен

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

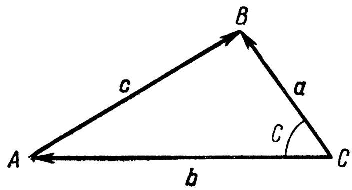

Рис. 39.

Возводя обе части этого равенства в скалярный квадрат, получим

$$c^2 = a^2 - 2\mathbf{ab} + b^2.$$

Угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен C (в обычных обозначениях тригонометрии), и $\mathbf{ab} = ab \cos C$; поэтому

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

что выражает теорему косинусов.

В заключение заметим, что *из равенства двух скалярных произведений с общим множителем, т. е. из равенства*

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ac} \qquad (\mathbf{a} \neq 0),$$

не следует, что равны вторые множители. Действительно, это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

Отсюда либо $\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$ и тогда $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, либо $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$. Очевидно, можно подобрать бесчисленное множество не равных между собой векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ таких, чтобы вектор, равный их разности $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, был перпендикулярен к данному вектору $\mathbf{a}$.

3. Выражение скалярного произведения через проекции векторов. Пусть вектор $\mathbf{a}$ имеет проекции a_x, a_y и a_z, а вектор $\mathbf{b}$ — проекции b_x, b_y и b_z. Тогда на основании формулы разложения вектора по координатным ортам (7.4) можно написать

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.$$

Составим скалярное произведение этих векторов:

$$\mathbf{ab} = (a_x\mathbf{i} + a\mathbf{j}_y + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

или, раскрывая скобки,

$$\mathbf{ab} = a_x b_x \mathbf{i}^2 + a_y b_x \mathbf{ji} + a_z b_x \mathbf{ki} + a_x b_y \mathbf{ij} + \\ + a_y b_y \mathbf{j}^2 + a_z b_y \mathbf{kj} + a_x b_z \mathbf{ik} + a_y b_z \mathbf{jk} + a_z b_z \mathbf{k}^2.$$

Учтем теперь (8.4). Тогда получим

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{8.10}$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных проекций.*

Из этого выражения можно получить несколько весьма полезных следствий.

Условие перпендикулярности двух векторов. *Для того чтобы два отличных от нуля вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы сумма произведений их одноименных проекций равнялась нулю:*

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{8.11}$$

(непосредственно следует из (8.10) и второго свойства скалярного произведения — см. стр. 56).

Угол между двумя векторами. Сравнивая правые части равенств (8.1) и (8.10), получим

$$ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кроме того, на основании (7.8)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Следовательно, угол между двумя векторами может быть определен из формулы

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{8.12}$$

Прежде чем рассмотреть несколько примеров, заметим, что в определение скалярного произведения (8.1) входят множители, не зависящие от того, являются ли векторы свободными, скользящими или связанными, поэтому все выражения, полученные в этом параграфе, имеют общий характер.

Пример. На рис. 40 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $AB = 3$ *м*, $AD = 12$ *м* и $AA' = 4$ *м*. Определить угол между диагональю параллелепипеда AC' и диагональю его боковой грани DC'.

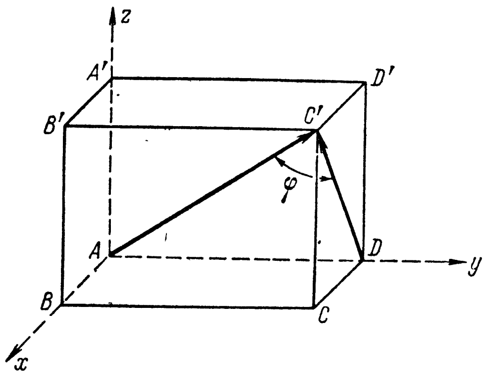

Рис. 40.

Обозначим искомый угол через φ, введем векторы $\overrightarrow{AC'}$ и $\overrightarrow{DC'}$ и на сторонах параллелепипеда построим систему координат xyz с началом в точке A. Тогда, так как параллелепипед прямоугольный, будем иметь:

$$\text{Пр}_x \overrightarrow{AC'} = 3 \text{ м}, \quad \text{Пр}_y \overrightarrow{AC'} = 12 \text{ м}, \quad \text{Пр}_z \overrightarrow{AC'} = 4 \text{ м},$$

$$\text{Пр}_x \overrightarrow{DC'} = 3 \text{ м}, \quad \text{Пр}_y \overrightarrow{DC'} = 0, \quad \text{Пр}_z \overrightarrow{DC'} = 4 \text{ м}.$$

Пользуясь (8.12), получим

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 3 + 12\cdot 0 + 4\cdot 4}{\sqrt{3^2+12^2+4^2}\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \frac{25}{13\cdot 5} = \frac{5}{13},$$

$$\varphi = \arccos\frac{5}{13} \approx 67^\circ 20'.$$

4. Векторные уравнения геометрических мест. Векторные уравнения геометрических мест определяются так же, как и обычные скалярные уравнения.

Рассмотрим какое-нибудь геометрическое место точек; положение каждой точки геометрического места будем определять радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Предположим, что с помощью некоторого уравнения

$$f(\mathbf{r})=0 \tag{8.13}$$

нам удастся выразить геометрические свойства, определяющие данное место точек; тогда уравнению (8.13) будут удовлетворять радиусы-векторы всех точек, принадлежащих данному геометрическому месту. Если, кроме того, уравнению (8.13) не будут удовлетворять радиусы-векторы никаких других точек, то оно называется *векторным уравнением* данного геометрического места.

Естественно, что вопрос можно поставить иначе. Дано уравнение (8.13), которому удовлетворяет некоторая совокупность радиусов-векторов. Эти радиусы-векторы определят геометрическое место точек (совокупность точек). В дальнейшем, пользуясь уравнением, можно изучить свойства этого геометрического места.

5. Уравнение плоскости. В качестве примера дадим вывод уравнения плоскости в пространстве. Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если задать одну точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, через которую проходит плоскость, и *нормальный вектор* $\mathbf{n}$, т. е. вектор, перпендикулярный к плоскости (рис. 41). Возьмем на плоскости произвольную точку M, положение которой будем определять радиусом-вектором $\mathbf{r}$, и построим вектор $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$. Этот вектор лежит в плоскости, поэтому он будет перпендикулярен к нормальному вектору $\mathbf{n}$ и скалярное произведение этих векторов должно равняться нулю, т. е.

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \tag{8.14}$$

или

$$\mathbf{nr}-\mathbf{nr}_0=0.$$

Векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}_0$ заданы, поэтому их скалярное произведение есть вполне определенное число. Если обозначить его через $-D$, т. е. $\mathbf{nr}_0=-D$, то последнее равенство примет вид

$$\mathbf{nr}+D=0. \tag{8.15}$$

Поскольку точка $M(\mathbf{r})$ на плоскости выбрана произвольно, то этому равенству удовлетворяет не один радиус-вектор $\mathbf{r}$, а бесчисленное их множество, причем все они определяют точки, лежащие на плоскости. С другой стороны, радиусы-векторы точек, не лежащих на данной плоскости, не удовлетворяют этому уравнению, так как в этом случае вектор $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ не будет лежать в плоскости и скалярное произведение $\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ не будет равно нулю. Поэтому (8.15) является векторным уравнением плоскости, причем $\mathbf{n}$ — заданный нормальный вектор, D — заданное число и $\mathbf{r}$ — текущий радиус-вектор точек плоскости.

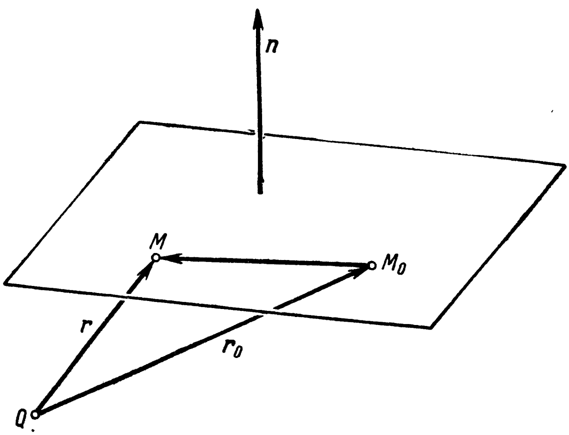

Рис. 41.

Из уравнения плоскости в векторной форме легко получить уравнение плоскости в координатах. Действительно, пусть проекции нормального вектора $\mathbf{n}$ на оси координат будут соответственно равны A, B, C (так как вектор $\mathbf{n}$ задан, то и числа A, B, C являются вполне определенными).

Проекции радиуса-вектора точки M равны x, y и z (см. (7.5)), а проекции вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ будут $x-x_0$, $y-y_0$ и $z-z_0$, где x, y, z и x_0, y_0, z_0 — координаты точки M и M_0 соответственно. Поэтому, если применить к (8.14) и (8.15) формулу (8.10), то получим следующие уравнения плоскости в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{8.16}$$

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{8.17}$$

причем последнее уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

Сделанный вывод общего уравнения плоскости полезен не только своей простотой, но также и геометрическим следствием: *коэффициенты при переменных в общем уравнении плоскости равны соответствующим проекциям вектора, нормального к плоскости.* Из этого обстоятельства вытекает целый ряд следствий. Приведем некоторые из них.

Даны две плоскости (т. е. даны их уравнения):

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Требуется определить угол между ними, условия перпендикулярности и параллельности.

Очевидно, что угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами; если плоскости взаимно перпендикулярны (или параллельны), то будут перпендикулярны (или параллельны) их нормальные векторы. Так как нормальные векторы данных плоскостей равны $\mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, то будем иметь

1) угол между плоскостями — см. (8.12):

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

2) условие перпендикулярности плоскостей — см. (8.11):

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,$$

3) условие параллельности плоскостей — см. (7.12):

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Почти столь же просто можно с помощью векторной интерпретации решить и другие аналогичные задачи аналитической геометрии.

6. Проекция вектора на ось как скалярное произведение вектора на орт оси. Рассмотрим вектор $\mathbf{a}$ и ось проекций, направление которой будем определять ее ортом $\mathbf{e}$.

Воспользуемся формулой (8.2′), учитывая при этом, что $|\mathbf{e}| = 1$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \text{Пр}_{\mathbf{e}}\, \mathbf{a}$$

или в других обозначениях:

$$a_e = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}, \tag{8.18}$$

т. е. *проекция вектора на ось равна скалярному произведению вектора на орт оси проекций.*

Пусть вектор **a** и орт **e** заданы своими проекциями на оси прямоугольной системы координат xyz, т. е. $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\mathbf{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β и γ — направляющие углы орта оси проекций (имеем: $e_x = |\mathbf{e}| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$). Тогда формуле (8.18) можно придать вид (см. (8.10))

$$a_e = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma. \tag{8.19}$$

Формулы (8.18) и (8.19) дают возможность вычислить проекцию любого вектора **a** на ось, занимающую произвольное положение в пространстве.

Пользуясь формулой (8.18), составим проекции вектора на оси координат x, y, z:

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}. \tag{8.20}$$

Эти выражения для проекций вектора на оси координат позволяют придать другой вид формуле разложения вектора по координатным ортам:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{ai})\,\mathbf{i} + (\mathbf{aj})\,\mathbf{j} + (\mathbf{ak})\,\mathbf{k}. \tag{8.21}$$

7. Изменение проекций вектора при преобразовании координат. Пусть вектор **a** задан своими проекциями a_x, a_y, a_z в прямоугольной системе координат xyz. Произведем преобразование координат и определим проекции того же вектора **a** в новой прямоугольной системе $x'y'z'$.

Прежде всего заметим, что если преобразование координат состоит в параллельном переносе, то проекции вектора останутся без изменения, т. е. проекции вектора в новой системе будут равны соответствующим проекциям вектора в старой системе (см. первое свойство п. 4 § 6, стр. 35). Поэтому представляет интерес только случай поворота осей.

Пусть новая система прямоугольных осей $x'y'z'$ определяется ортами $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$, направление которых относительно старых осей будем определять таблицей косинусов

	x'	y'	z'
x	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z	α_{31}	α_{32}	α_{33}

где α_{mn} — косинусы углов между соответствующими осями; например, $\alpha_{32}=\cos(zy')$, $\alpha_{23}=\cos(yz')$ и т. д.

Из девяти величин, составляющих эту таблицу, **независимых** только **три**, так как они подчинены шести условиям (условия единичности $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1$ и условия перпендикулярности $\mathbf{ij}=0$, $\mathbf{jk}=0$, $\mathbf{ki}=0$):

$$\begin{gathered}\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2=1,\\ \alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2=1,\\ \alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2=1,\\ \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}=0,\\ \alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{33}=0,\\ \alpha_{31}\alpha_{11}+\alpha_{32}\alpha_{12}+\alpha_{33}\alpha_{13}=0.\end{gathered} \tag{8.22}$$

Согласно (8.20) имеем

$$a_{x'}=\mathbf{ai}',\quad a_{y'}=\mathbf{aj}',\quad a_{z'}=\mathbf{ak}' \tag{8.23}$$

или в силу (8.19)

$$\begin{aligned} a_{x'}&=\alpha_{11}a_x+\alpha_{21}a_y+\alpha_{31}a_z,\\ a_{y'}&=\alpha_{12}a_x+\alpha_{22}a_y+\alpha_{32}a_z,\\ a_{z'}&=\alpha_{13}a_x+\alpha_{23}a_y+\alpha_{33}a_z.\end{aligned} \tag{8.24}$$

Формулы (8.23) или (8.24) решают поставленную задачу.

Естественно, что, пользуясь той же таблицей, легко получить и формулы обратного перехода:

$$\begin{aligned} a_x &= \alpha_{11} a_{x'} + \alpha_{12} a_{y'} + \alpha_{13} a_{z'}, \\ a_y &= \alpha_{21} a_{x'} + \alpha_{22} a_{y'} + \alpha_{23} a_{z'}, \\ a_z &= \alpha_{31} a_{x'} + \alpha_{32} a_{y'} + \alpha_{33} a_{z'}. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Если система плоская, то, обозначив угол $\widehat{xx'}$ через α, будем иметь (рис. 42):

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = \cos\alpha, && \alpha_{12} = -\sin\alpha, && \alpha_{13} = 0, \\ &\alpha_{21} = \sin\alpha, && \alpha_{22} = \cos\alpha, && \alpha_{23} = 0, \\ &\alpha_{31} = 0, && \alpha_{32} = 0, && \alpha_{33} = 1 \end{aligned}$$

и формулы (8.25) примут вид

$$\begin{aligned} a_x &= a_{x'} \cos\alpha - a_{y'} \sin\alpha, \\ a_y &= a_{x'} \sin\alpha + a_{y'} \cos\alpha. \end{aligned} \tag{8.26}$$

8. Другое определение вектора. Пусть a_x, a_y, a_z — проекции вектора **a** в системе xyz, а $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$ — проекции того же вектора в системе $x'y'z'$. Тогда между этими проекциями будет существовать зависимость (8.24) или (8.25). Обратно, пусть даны два вектора, из которых один определен в системе xyz проекциями a_x, a_y, a_z, а второй определен в системе $x'y'z'$ и имеет проекции $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$. Очевидно, что если проекции связаны линейными соотношениями (8.24), то эти два вектора являются совершенно тождественными.

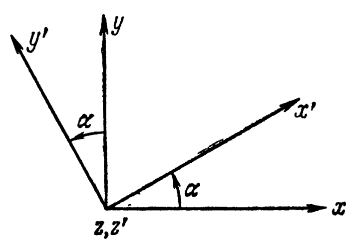

Рис. 42.

Это обстоятельство лежит в основе нового определения вектора, удобного при построении тензорного исчисления*): *если в прямолинейной прямоугольной системе координат xyz заданы три числа a_x, a_y, a_z, которые при*

*) Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, 1951.

любом преобразовании координат переходят по формулам (8.24) *в другие три числа* $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, *то совокупность этих трех чисел определяет новую величину* **a**, *называемую аффинным ортогональным вектором.*

§ 9. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

1. Определение векторного произведения. Рассмотрим два вектора, приведем их к одному началу и будем считать один из них первым, а другой вторым. *Векторным произведением* двух векторов называется *новый вектор* (вектор-произведение), определенный следующим образом *).

1. Модуль вектора-произведения равен произведению модулей векторов-сомножителей на синус угла между ними (определение угла см. в п. 5 § 6, стр. 36).

2. Линия действия вектора-произведения перпендикулярна к обоим векторам-сомножителям.

3. Вектор-произведение направлен по линии действия в такую сторону, из которой переход вращением от первого вектора-сомножителя ко второму на наименьший угол виден против хода часовой стрелки (для правой системы).

4. Точка приложения вектора-произведения для свободных векторов-сомножителей может быть выбрана произвольно, а для скользящих и несвободных векторов она определяется физическим смыслом рассматриваемого вопроса.

Обозначается векторное произведение косым крестом $\times$; слева ставится первый вектор-сомножитель, а справа второй вектор. Например, векторное произведение векторов **a** и **b**, где **a** — первый множитель, записывается так:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Заметим, что в некоторых руководствах векторное произведение вектора **a** на вектор **b** обозначается прямыми скобками: [**a**, **b**].

На рис. 43 показан вектор-произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. В соответствии с определением имеем

$$\left.\begin{aligned} &|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\alpha \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant\pi),\\ &\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a} \text{ и } \mathbf{b}.\end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

*) См. п. 8 § 9.

Векторы **a**, **b** и $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ образуют правую тройку (для правой системы).

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие его свойства.

1) Если векторы коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю (так как в этом случае $\alpha=0$ или π и $\sin\alpha=0$). В частности, векторный квадрат $\mathbf{a}\times\mathbf{a}$ равен нулю:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0. \qquad (9.2)$$

2) Для того чтобы два отличных от нуля вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулю (из $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$ следует: либо $\mathbf{a}=0$, либо $\mathbf{b}=0$, либо $\sin\alpha=0$).

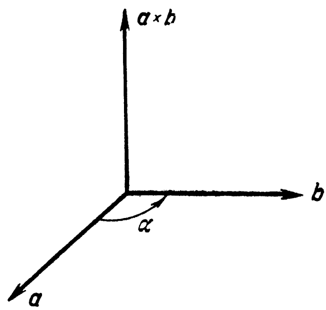

Рис. 43.

3) Если известно, что равенство

$$\mathbf{a}\times\mathbf{x}=0 \qquad (9.3)$$

выполняется при любом векторе **x**, то можно утверждать, что вектор **a** равен нулю [см. аналогичное свойство для скалярного произведения (8.5)].

Действительно, если предположить, что $\mathbf{a}\neq 0$, то достаточно взять вектор $\mathbf{x}\neq 0$ и не параллельный **a** (это можно сделать, так как **x** — произвольный вектор). При таком выборе вектора **x** произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{x}\neq 0$, что противоречит условию.

4) Размерность модуля вектора-произведения равна произведению размерностей модулей векторов-сомножителей.

Из этого следует, что вектор-произведение должен иметь другой масштаб, чем векторы-сомножители.

Численно в соответствующем масштабе модуль вектора-произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях (площадь параллелограмма равна произведению длин его сторон на синус угла между ними).

2. Примеры из физики. Операция векторного произведения, так же как и операция скалярного произведения, находит широкое применение в различных физических вопросах. Приведем несколько примеров.

1. Скорость точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой, вообще говоря, переменной скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в такую сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки (для правой системы). Возьмем в теле произвольную точку M; при вращении тела эта точка M описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения. Скорость точки направлена по касательной к этой окружности и по величине равна произведению модуля угловой скорости ω на расстояние от точки до оси вращения h (рис. 44):

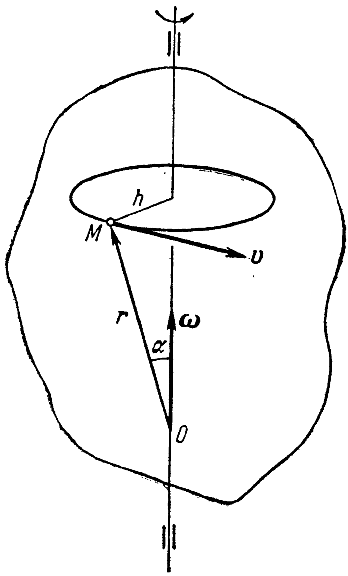

Рис. 44.

$$v = \omega h.$$

Выберем на оси вращения произвольную точку (полюс) и проведем из нее радиус-вектор точки M. Непосредственно из чертежа видно, что расстояние h от точки M до оси вращения равно $r \sin \alpha$, где α — угол между $\mathbf{r}$ и осью вращения, или $\boldsymbol{\omega}$. Следовательно,

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha.$$

Кроме того, $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$ и из конца вектора скорости $\mathbf{v}$ переход вращением на наименьший угол от $\boldsymbol{\omega}$ к $\mathbf{r}$ виден против хода часовой стрелки. Поэтому вектор скорости равен векторному произведению:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{9.4}$$

причем точка приложения вектора-произведения $\mathbf{v}$ совпадает с концом второго вектора-сомножителя $\mathbf{r}$.

2. Момент вектора относительно точки. В физике важная роль принадлежит понятию о моменте вектора (момент силы, момент скорости, момент количества движения и т. п.).

Моментом вектора $\mathbf{a}$ относительно произвольной точки пространства O называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения A, проведенного из полюса O, на вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \tag{9.5}$$

где $\mathbf{m}_O(\mathbf{a})$ — момент вектора $\mathbf{a}$ относительно точки O и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ (более подробно о моменте вектора см. § 13).

В соответствии с этим имеем:

а) момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки O:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F};$$

б) момент скорости $\mathbf{v}$ относительно полюса O:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

(половина этого момента равна секторной скорости точки $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$);

в) момент количества движения материальной точки:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{K}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

(m — масса точки).

Формулу (9.4) можно переписать в виде — см. (9.9)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MO} \times \boldsymbol{\omega}$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{m}_M(\boldsymbol{\omega}), \tag{9.6}$$

т. е. *скорость любой точки твердого тела, вращающегося с угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}$, *равна моменту угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$ *относительно выбранной точки.*

Приведем еще два примера без подробных пояснений.

3. Электрон в магнитном поле. Сила $\mathbf{F}$, с которой действует постоянное магнитное поле на электрон, равна

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H},$$

где e — заряд электрона, $\mathbf{v}$ — его скорость, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, c — электродинамическая постоянная. В данном случае векторное произведение, равное силе $\mathbf{F}$, приложено к электрону.

4. Кориолисово ускорение. Если точка движется относительно некоторой перемещающейся системы отсчета, то помимо относительного и переносного ускорений возникает дополнительное поворотное ускорение, определяемое формулой

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{a}_c$ — поворотное ускорение (ускорение Кориолиса), $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения системы отсчета и $\mathbf{v}_r$ — относительная скорость точки.

3. Способ Н. Е. Жуковского построения векторного произведения*). Имеется очень простой и наглядный способ построения векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (рис. 45).

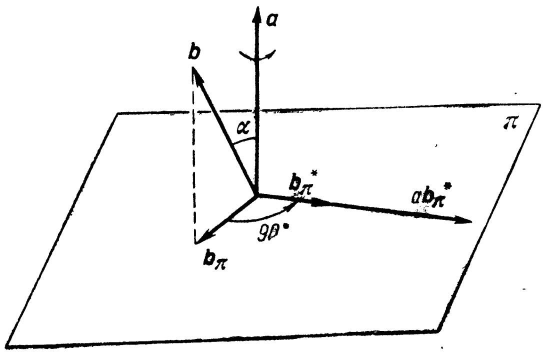

Рис. 45.

Проведем плоскость π перпендикулярно к первому вектору-сомножителю $\mathbf{a}$. Спроектируем второй вектор-сомножитель $\mathbf{b}$ на плоскость π и построим составляющую вектора $\mathbf{b}$ по плоскости (см. § 6, п. 1, стр. 32). Составляющую $\mathbf{b}_\pi$ повернем вокруг $\mathbf{a}$ на 90° против хода часовой стрелки и операцию поворота обозначим звездочкой наверху; в нашем

*) В том виде, в каком этот метод излагается в настоящем руководстве, он был, насколько нам известно, впервые применен Н. Е. Жуковским при пояснении им правила построения кориолисова ускорения. Способы, близкие к методу Н. Е. Жуковского, были известны до него.

случае повернутая составляющая будет $\mathbf{b}_\pi^*$. Умножим вектор $\mathbf{b}_\pi^*$ на модуль a; полученный вектор $a\mathbf{b}_\pi^*$ будет равен $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Действительно,

$$|a\mathbf{b}_\pi^*| = a\,|\mathbf{b}_\pi^*|.$$

Так как вектор $\mathbf{b}_\pi^*$ получен из $\mathbf{b}_\pi$ простым поворотом, то $|\mathbf{b}_\pi^*| = |\mathbf{b}_\pi|$. Кроме того, $|\mathbf{b}_\pi| = |\mathbf{b}|\cdot\cos(90^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$. Следовательно,

$$|a\mathbf{b}_\pi^*| = ab\sin\alpha = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

Докажем теперь, что векторы $a\mathbf{b}_\pi^*$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ совпадают не только по величине, но и направлению. Вектор $a\mathbf{b}_\pi^*\perp\mathbf{a}$ (он лежит в плоскости π, перпендикулярной к $\mathbf{a}$), и вектор $a\mathbf{b}_\pi^*\perp\mathbf{b}_\pi$ (по построению). Отсюда следует, что $a\mathbf{b}_\pi^*\perp\mathbf{b}$ (так как вектор $\mathbf{b}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}_\pi$). Осталось показать, что тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $a\mathbf{b}_\pi^*$ является правой. Но это следует из направления поворота составляющей $\mathbf{b}_\pi$ (см. рис 45). Таким образом, доказано, что построенный вектор $a\mathbf{b}_\pi^*$ равен вектору-произведению $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a\mathbf{b}_\pi^*. \tag{9.7}$$

Закончим изложение метода Н. Е. Жуковского замечанием, что обе операции, лежащие в его основе (операция построения составляющей вектора по плоскости и операция поворота), обладают распределительным свойством. Для первой из этих операций это было уже доказано (см. (6.1)). Наличие распределительного свойства для второй операции очевидно, так как при операции (*), т. е. операции поворота, параллелограмм векторов поворачивается как твердое тело (см. рис. 46). Поэтому

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})^* = \mathbf{b}^* + \mathbf{c}^*. \tag{9.8}$$

4. Свойства векторного произведения. Векторное произведение не обладает переместительным свойством. Рассмотрим два векторных произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Очевидно, что модули векторов-произведений и линии действия совпадают для обоих произведений (следует из определения произведения), но стороны действия прямо противоположны. Действительно, если со стороны вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ переход вращением на наименьший угол от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ виден против хода часовой стрелки, то аналогичный

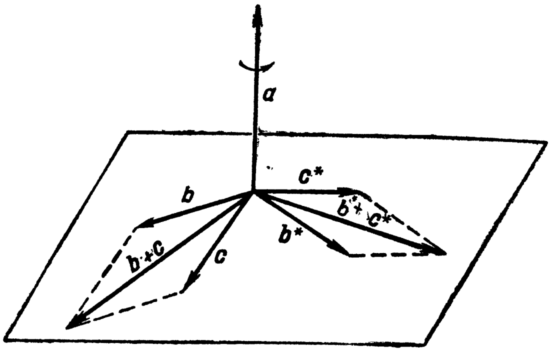

Рис. 46.

переход от $\mathbf{b}$ к $\mathbf{a}$ виден против хода часовой стрелки с противоположного направления (см. рис. 47). Таким образом, векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ равны по величине, действуют по одной прямой, но направлены в противоположные стороны, т. е. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ и переместительный закон для векторного произведения не справедлив. Из приведенного рассуждения следует также важное свойство векторного произведения: *при перемене мест сомножителей вектор-произведение изменяет направление на противоположное* или иначе: *при перемене мест сомножителей векторное произведение умножается на* -1:

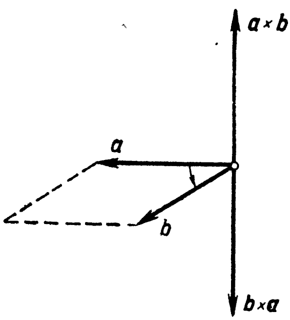

Рис. 47.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{9.9}$$

Сочетательное свойство. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно числового множителя:

$$\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}). \tag{9.10}$$

Распределительное свойство. Для векторного произведения справедливо распределительное свойство

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}. \qquad (9.11)$$

Два последних свойства легко доказать, пользуясь правилом Н. Е. Жуковского. Докажем, например, последнее свойство. На основании (9.7) имеем

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=a(\mathbf{b}+\mathbf{c})^*_\pi.$$

Так как операции (π) и (*) обладают распределительным свойством (см. (6.1) и (9.8)), то

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})^*_\pi=\mathbf{b}^*_\pi+\mathbf{c}^*_\pi.$$

Внося это в предыдущее выражение, получим

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=a\mathbf{b}^*_\pi+a\mathbf{c}^*_\pi.$$

Согласно (9.7) $a\mathbf{b}^*_\pi=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $a\mathbf{c}^*_\pi=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, следовательно, равенство (9.11) справедливо.

Пользуясь доказанными свойствами векторного произведения, можно векторные многочлены перемножать (векторно), как обычные многочлены, нужно только соблюдать порядок множителей, а в случае их перестановки следует применять равенство (9.9). Кроме того, нужно помнить, что векторный квадрат вектора равен нулю (см. (9.2)).

Пример.

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}-5\mathbf{b})=2\mathbf{a}\times\mathbf{a}+6\mathbf{b}\times\mathbf{a}-5\mathbf{a}\times\mathbf{b}-$$
$$-15\mathbf{b}\times\mathbf{b}=6\mathbf{b}\times\mathbf{a}+5\mathbf{b}\times\mathbf{a}=11\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

Заметим, что формулы сокращенного умножения здесь совершенно неприменимы. Например:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}=2\mathbf{b}\times\mathbf{a}\neq\mathbf{a}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}.$$

5. Разложение вектора-произведения по координатным ортам. Постановка задачи: даны проекции векторов-сомножителей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; требуется определить проекции вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Для решения этой задачи прежде всего составим всевозможные парные произведения координатных ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Согласно (9.2)

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0,\quad \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0. \qquad (9.12)$$

Рассмотрим теперь произведение $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ — см. рис. 31. Модуль этого произведения равен единице ($|\mathbf{i}\times\mathbf{j}|=|\mathbf{i}|\times\times|\mathbf{j}|\sin(\mathbf{i},\ \mathbf{j})=1\cdot1\cdot\sin 90^\circ=1$). Далее, вектор-произведение $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ перпендикулярен к $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, т. е. он совпадает с осью z. Кроме того, этот вектор должен быть направлен в сторону положительного отсчета оси z, так как при этом векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ образуют правую тройку; следовательно,

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}.$$

Присоединяя к этому равенству еще два аналогичных выражения, получающихся из данного круговой перестановкой векторов, и пользуясь формулой (9.9), будем иметь:

$$\begin{matrix} \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}. \end{matrix} \tag{9.13}$$

Воспользуемся теперь формулой разложения вектора по координатным ортам (7.4)

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$$

и составим произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})$$

или, раскрывая скобки:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+$$
$$+a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}.$$

Учтем (9.12) и (9.13):

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-a_yb_x\mathbf{k}+a_zb_x\mathbf{j}+a_xb_y\mathbf{k}-a_zb_y\mathbf{i}-a_xb_z\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{i}.$$

После группировки:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k}. \tag{9.14}$$

Эта формула определяет разложение вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ по координатным ортам и решает поставленную задачу. Действительно, при выводе формулы (7.4) было отмечено, что коэффициенты при координатных ортах являются проекциями вектора на соответствующие оси. Следовательно:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x &= a_y b_z - a_z b_y,\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y &= a_z b_x - a_x b_z,\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z &= a_x b_y - a_y b_x.\end{aligned} \tag{9.15}$$

Формуле (9.14) можно придать более простой и удобный для запоминания вид, если формально воспользоваться определителем третьего порядка

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{9.16}$$

Раскрывая этот определитель по элементам первой строки, получим (9.14).

Проекции вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ на оси координат x, y, z согласно (9.15) можно рассматривать как соответствующие алгебраические дополнения элементов первой строки и представить их в форме определителей второго порядка:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y &= -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z &= \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{9.17}$$

Существует простой способ составления проекций векторного произведения, основанный на формулах (9.17). Для этого нужно выписать соответствующие проекции обоих векторов-сомножителей друг под другом (сверху — проекции первого множителя, снизу — проекции второго). Для вычисления проекции вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ на ось x мысленно зачеркиваем первый столбец; оставшиеся четыре проекции образуют определитель второго порядка (он вычисляется в уме), равный $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x$. Для вычисления $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y$ или $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z$ нужно мысленно зачеркнуть соответственно второй и третий столбцы; при этом определитель, полученный при зачеркивании второго столбца, нужно взять с обратным знаком. Покажем это на примере.

Пример. Даны векторы $\mathbf{a}(2, 1, 3)$ и $\mathbf{b}(-1, 4, 2)$. Выписываем эти векторы с их проекциями друг под другом:

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}(\ \ 2,\ 1,\ 3), \\ \mathbf{b}(-1,\ 4,\ 2). \end{array}$$

Вычеркивая первый столбец, получим определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем этот определитель (он равен $1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10$) и приравниваем его $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = -10.$$

Затем вычеркиваем второй столбец и из оставшихся чисел снова составляем определитель второго порядка. Взятый с обратным знаком, он будет равен $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7.$$

Вычеркивая последний столбец, получим $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9.$$

Все вычисления можно производить в уме и результат выписывать сразу же внизу под вектором $\mathbf{b}$. Ниже показан порядок записи для двух примеров:

$$\begin{array}{r} \mathbf{a}(\ \ 2,\ 1,\ 3) \\ \mathbf{b}(-1,\ 4,\ 2) \\ \hline \mathbf{a} \times \mathbf{b}(-10,\ -7,\ 9) \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{a}_1(-3,\ 4,\ 1) \\ \mathbf{b}_1(\ \ 7,\ 0,\ 2) \\ \hline \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1(8,\ 13,\ -28) \end{array}$$

Полученные результаты можно записать и следующим образом:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-10\mathbf{i}-7\mathbf{j}+9\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1=8\mathbf{i}+13\mathbf{j}-28\mathbf{k}.$$

Естественно, что этот прием не вносит ничего принципиально нового по сравнению с вычислением векторного произведения с помощью определителя (9.16), но он позволяет сократить несколько запись.

6. Условие коллинеарности двух векторов. В п. 1 было отмечено, что если два вектора коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0. \tag{9.18}$$

Это условие при $\mathbf{a}\neq 0$ и $\mathbf{b}\neq 0$ является не только необходимым, но и достаточным. Пользуясь (9.18), легко получить условия, которым подчиняются проекции двух коллинеарных векторов. Если вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ равен нулю, то равны нулю и все его проекции, и из (9.15) будем иметь:

$$a_yb_z-a_zb_y=0,$$

$$a_zb_x-a_xb_z=0,$$

$$a_xb_y-a_yb_x=0.$$

или

$$\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z},\quad \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_z}{b_z},\quad \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}.$$

Из данных трех равенств независимых, естественно, только два, и их можно записать в следующем симметричном виде:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

Эти условия коллинеарности двух векторов были получены ранее (см. (7.12)) совершенно из других соображений.

7. Тождество Лагранжа. Составим сумму квадратов модулей скалярного и векторного произведений, пользуясь определениями произведений:

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=(ab\cos\alpha)^2+(ab\sin\alpha)^2=a^2b^2. \tag{9.19}$$

Воспользуемся теперь формулами (7.8), (8.10), (9.15):

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$
$$b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2,$$
$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2,$$
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2.$$

Вносся эти выражения в тождество (9.19), получим

$$(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + \\ + (a_x b_y - a_y b_x)^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \cdot (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2). \quad (9.20)$$

Это равенство, справедливое при любых a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, известно под названием *тождество Лагранжа*. Естественно, что его можно легко проверить и непосредственно.

8. Полярные и аксиальные векторы. Среди векторных величин имеются такие, которые не зависят от принятой системы отсчета. К ним относятся сила, скорость точки, ускорение и т. п. Такие векторные величины называются *полярными векторами* или просто векторами.

Одновременно с полярными векторными величинами существуют векторы, направление которых существенным образом зависит от принятой ориентации координатных осей. Рассмотрим пример. При правой системе отсчета вектор угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направлен вдоль оси вращения в такую сторону, из которой вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки. Если же изменить систему отсчета с правой на левую, то вектор угловой скорости, не меняя своей величины, изменит свое направление на прямо противоположное. Точно так же ведет себя произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — полярные векторы, и некоторые другие векторные величины. В связи с тем, что направления таких векторов зависят от принятой системы координатных осей, векторные величины указанного вида называются аксиальными векторами.

Если принять какую-нибудь ориентацию осей (например, правую) и в дальнейшем не изменять ее, то все математические действия как с полярными, так и аксиальными векторами будут подчиняться одним и тем же законам. Поэтому, как правило, под словом «векторы» понимают не только векторы в собственном значении этого слова, но также и аксиальные векторы.

§ 10. СЛОЖНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. Смешанное произведение трех векторов. Рассмотрим три вектора **a**, **b**, **c** и составим произведение

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

В этом произведении вектор **a** сначала умножается векторно на **b**, а затем полученный вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ умножается скалярно на **c**. Такое произведение называется *смешанным*. Очевидно, что в результате должен получиться скаляр (последнее действие — скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и **c**). Вычислим это число, пользуясь тем, что скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных проекций — см. (8.10):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x \cdot c_x + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y \cdot c_y + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z \cdot c_z.$$

Внесем в это выражение значения проекций вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ из (9.15):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + \\ + (a_x b_y - a_y b_x) c_z.$$

Правая часть этого равенства равна определителю третьего порядка:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{10.1}$$

что нетрудно проверить, разложив определитель, например, по элементам третьей строки.

Легко установить следующие основные свойства смешанного произведения.

а) Смешанное произведение не изменяется от перестановки действий, т. е.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{10.2}$$

Действительно, рассмотрим произведение

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

(эту перестановку множителей можно делать, так как скалярное произведение обладает свойством переместительности). Воспользуемся теперь (10.1), изменив соответственно данному случаю обозначения:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Переставим в этом определителе последнюю строку на место второй, а вторую на место третьей, затем вторую строку поставим на место первой, а первую на место второй. При каждой перестановке строк определитель меняет знак на обратный, поэтому при сделанных двух перестановках определитель не изменится, но в результате последний определитель будет совпадать с определителем (10.1), что доказывает равенство (10.2).

Это свойство дает основание обозначать **смешанное произведение** следующим сокращенным образом:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}),$$

не уточняя без особой необходимости, где стоят знаки векторного и скалярного произведений. В соответствии с этим обозначением формула (10.1) примет вид

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (10.3)$$

б) Смешанное произведение не изменяется от циклической (круговой) перестановки сомножителей:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = (\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{a}) = (\mathbf{c},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b}). \qquad (10.4)$$

Действительно, пользуясь свойством а) и переместительным свойством скалярного произведения, последовательно получим

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{a}).$$

в) От перестановки местами двух сомножителей смешанное произведение, не изменяя своей абсолютной величины, меняет знак на противоположный:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = -(\mathbf{b},\ \mathbf{a},\ \mathbf{c}). \qquad (10.5)$$

Это свойство доказывается следующей цепочкой равенств:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b},\ \mathbf{a},\ \mathbf{c}).$$

г) Если два вектора коллинеарны, то смешанное произведение равно нулю. Действительно, пусть **a** и **c** коллинеарны. Имеем

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = (\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0,$$

так как векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю. В частности, если в смешанном произведении имеется два равных вектора, то оно равно нулю:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b}) = 0. \qquad (10.6)$$

Смешанное произведение трех векторов имеет простой геометрический смысл — с точностью до знака оно равно объему параллелепипеда, построенного на данных векторах. Для доказательства построим на данных векторах параллелепипед (предполагается, что векторы не компланарны) и вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (рис. 48). Обозначим: S — площадь основания параллелепипеда (основания, построенного на векторах **a** и **b**), h — его высота и α — угол между векторами **c** и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

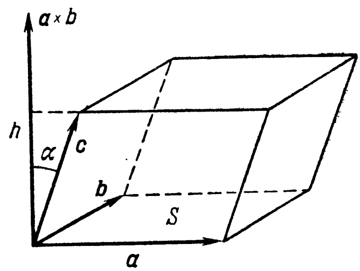

Рис. 48.

Согласно определению скалярного произведения, имеем

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot c \cdot \cos\alpha = S \cdot c \cdot \cos\alpha.$$

Из рис. 48 видно, что $c \cdot \cos\alpha = h$. Следовательно,

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = S \cdot h,$$

что равно объему параллелепипеда.

На рис. 48 тройка векторов **a**, **b**, **c** является правой, в результате чего угол α оказался острым и $\cos\alpha > 0$. Если тройка векторов **a**, **b**, **c** будет левой, то угол α будет тупым и $\cos\alpha < 0$. В этом случае произведение $c \cdot \cos\alpha$ хотя и будет отрицательно, но по абсолютной величине оно равно высоте параллелепипеда h. Итак, можно сделать следующий вывод: *смешанное произведение с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, причем это произведение будет положительно, если тройка данных векторов является правой, и отрицательно, если тройка векторов левая* (при принятой правой системе):

$$V = \pm(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}). \tag{10.7}$$

Рассмотрим условия, при которых смешанное произведение трех векторов равно нулю. Очевидно, что это возможно в следующих случаях:

1) среди множителей имеется хотя бы один нулевой вектор;

2) если два (или все три) вектора коллинеарны — см. свойство г);

3) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Действительно, в этом случае $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ и, следовательно, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Третий случай по существу охватывает первые два случая, так как если среди трех векторов имеется хотя бы два коллинеарных или хотя бы один нулевой, то все три вектора компланарны (см. § 1, п. 7, стр. 15). Итак, *для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю*:

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}) = 0 \tag{10.8}$$

или, сравнивая с (10.3),

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \tag{10.9}$$

Таково необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов, выраженное через проекции. Условие (10.8) или, что то же самое, (10.9) является очень удобным и часто применяется в приложениях.

Пример. Даны три точки, не лежащие на одной прямой:

$$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2) \text{ и } M_3(x_3,\ y_3,\ z_3).$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через эти три точки.

Возьмем в плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$ и построим векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ (рис. 49). Все

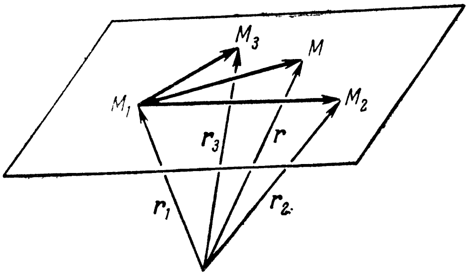

Рис. 49.

три вектора лежат в одной плоскости, следовательно, они компланарны и их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}) = 0,$$

или

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0, \tag{10.10}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ — радиусы-векторы точек M, M_1, M_2, M_3 соответственно. Этому равенству удовлетворяют радиусы-векторы $\mathbf{r}$ любых точек, лежащих на плоскости, и не удовлетворяют радиусы-векторы точек, не лежащих на плоскости (так как в последнем случае векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ не будут компланарны). Следовательно, (10.10) есть уравнение плоскости в векторной форме. Для того чтобы написать уравнение плоскости в координатной форме, достаточно воспользоваться формулой (10.9):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.10'}$$

Заметим, что если точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ будут коллинеарны и на основании свойства г) смешанного произведения равенство

(10.10), а следовательно, и (10.10') будет выполняться тождественно при любых $\mathbf{r}$, т. е. при любых x, y и z. Геометрически это означает, что при этих условиях существует бесчисленное множество плоскостей, проходящих через данные три точки (через прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей).

2. Двойное векторное произведение. Составим из трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ произведение (оно называется *двойным векторным произведением*)

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Прежде всего заметим, что в результате такого двойного векторного произведения должен получиться вектор. В самом деле, произведение $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ определяет некоторый вектор, который после умножения слева векторно на $\mathbf{a}$ дает снова вектор.

Векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ компланарны, так как по определению векторного произведения они перпендикулярны к вектору $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Поэтому вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ можно разложить по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (см. выражение (4.1)):

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}, \qquad (10.11)$$

где λ и μ — неизвестные коэффициенты разложения.

Для определения λ и μ умножим скалярно обе части равенства (10.11) на вектор $\mathbf{a}$. Так как $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\perp\mathbf{a}$, то слева скалярное произведение будет равно нулю и, следовательно,

$$\lambda(\mathbf{ab})+\mu(\mathbf{ac})=0.$$

Этому равенству можно придать вид

$$\frac{\lambda}{\mathbf{ac}}=-\frac{\mu}{\mathbf{ab}}=\nu,$$

где ν — общее значение данных отношений. Отсюда

$$\lambda=\nu(\mathbf{ac}),\quad \mu=-\nu(\mathbf{ab}).$$

Внесем эти значения коэффициентов разложения в (10.11):

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\nu\{\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})\}. \qquad (10.12)$$

Покажем теперь, что параметр ν не зависит от векторов-сомножителей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Предположим обратное и применим равенство (10.12) к векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ — произвольный, но фиксированный вектор). Тогда, обозначив через ν, ν' и ν'' соответствующие параметры, будем иметь:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\nu\{\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab})\},$$

$$\mathbf{x}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\nu'\{\mathbf{b}(\mathbf{xc})-\mathbf{c}(\mathbf{xb})\},$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{x})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\nu''\{\mathbf{b}[(\mathbf{a}+\mathbf{x})\cdot\mathbf{c}]-\mathbf{c}[(\mathbf{a}+\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}]\}.$$

Сложим первые два равенства и сгруппируем члены

$$(\mathbf{a}+\mathbf{x})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}[(\nu\mathbf{a}+\nu'\mathbf{x})\cdot\mathbf{c}]-\mathbf{c}[(\nu\mathbf{a}+\nu'\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}].$$

Сравнивая последние два выражения, а затем коэффициенты при одинаковых векторах, получим

$$(\nu''\mathbf{a}+\nu''\mathbf{x})\cdot\mathbf{c}=(\nu\mathbf{a}+\nu'\mathbf{x})\cdot\mathbf{c};\quad(\nu''\mathbf{a}+\nu''\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}=(\nu\mathbf{a}+\nu'\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}.$$

Отсюда, учитывая произвольность вектора $\mathbf{x}$ (см. (8.5)), найдем

$$\nu''\mathbf{a}+\nu''\mathbf{x}=\nu\mathbf{a}+\nu'\mathbf{x}$$

и, следовательно,

$$\nu''=\nu'=\nu,$$

что доказывает независимость ν от первого множителя (аналогично можно доказать, что ν не зависит и от двух других множителей).

Так как параметр ν не зависит от $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то для его определения можно выбрать любые векторы, в частности такие, произведения которых вычисляются непосредственно, например $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$. Тогда согласно (10.12) будем иметь:

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{i})=\nu\{\mathbf{k}(\mathbf{ii})-\mathbf{i}(\mathbf{ik})\}.$$

С другой стороны, пользуясь (9.13) и (8.4), получим: $\mathbf{i}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{i})=\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$; $\mathbf{ii}=1$, $\mathbf{ik}=0$, и последнее равенство принимает вид

$$\mathbf{k}=\nu\mathbf{k}.$$

Отсюда

$$\nu=1.$$

Внося это значение ν в (10.12), окончательно найдем

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}).\tag{10.13}$$

Для запоминания правой части этой формулы ее удобно читать так: *«бац минус цаб»* — нужно только помнить, что в левой части вектор $\mathbf{a}$ умножается на $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

Составим теперь произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. На основании (10.13) последовательно получим:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-\{\mathbf{a}(\mathbf{cb})-\mathbf{b}(\mathbf{ac})\}$$

или окончательно:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc}). \tag{10.13'}$$

Формулам (10.13) и (10.13′) можно придать следующую общую словесную формулировку: *двойное векторное произведение равно среднему (по занимаемому месту) вектору, умноженному на скалярное произведение двух крайних, минус другой вектор скобки, умноженный на скалярное произведение оставшихся векторов.*

Из сложных произведений векторов смешанное и двойное векторное произведения встречаются наиболее часто.

Кратко остановимся на некоторых других формулах векторной алгебры.

3. Разложение вектора по трем другим векторам. В § 4 было установлено, что любой вектор $\mathbf{s}$ можно разложить по трем другим некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (см. (4.3)):

$$\mathbf{s}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}. \tag{10.14}$$

При выводе этой формулы было доказано, что это разложение существует и оно единственно, однако коэффициенты разложения не были определены.

Найдем эти коэффициенты, считая, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{s}$ заданы.

Умножим скалярно обе части равенства (10.14) на вектор $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Тогда, учитывая (10.6), получим

$$(\mathbf{s},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}).$$

Отсюда

$$\lambda=\frac{(\mathbf{s},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}$$

(векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ по предположению не компланарны, поэтому $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})\neq 0$).

Аналогично

$$\mu = \frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{s},\ \mathbf{c})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})},$$

$$\nu = \frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{s})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}.$$

Следовательно, искомое разложение будет

$$\mathbf{s} = \frac{(\mathbf{s},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}\mathbf{a} + \frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{s},\ \mathbf{c})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{s})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}\mathbf{c}. \qquad (10.15)$$

4. Скалярное произведение двух векторных произведений. Рассмотрим скалярное произведение

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

Это произведение можно рассматривать как смешанное произведение векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Поэтому

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x}] \cdot \mathbf{y}.$$

Воспользуемся формулой (10.13′):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = [\mathbf{b}(\mathbf{ax}) - \mathbf{a}(\mathbf{bx})]\,\mathbf{y} = (\mathbf{ax})(\mathbf{by}) - (\mathbf{ay})(\mathbf{bx}),$$

или, окончательно,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ax} & \mathbf{ay} \\ \mathbf{bx} & \mathbf{by} \end{vmatrix}. \qquad (10.16)$$

5. Векторное произведение двух векторных произведений. Рассмотрим векторное произведение двух векторных произведений $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{s})$ как двойное векторное произведение векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{s}$. Тогда

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{s}) = \mathbf{c}\,[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{s}] - \mathbf{s}\,[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}],$$

или,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{s})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})\,\mathbf{s}. \qquad (10.17)$$

Это произведение можно рассматривать также как двойное векторное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c} \times \mathbf{s}$, и аналогично предыдущему

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{s})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{s})\,\mathbf{a}. \qquad (10.18)$$

Сравнивая правые части, получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{s} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{s})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{s})\,\mathbf{a}.$$

Эта формула совпадает с (10.15).

6. Произведение двух смешанных произведений. В формуле (10.15) заменим вектор $\mathbf{s}$ на вектор $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, умножим обе части равенства на число $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ и представим смешанные произведения правой части в следующем виде:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})]\,\mathbf{a} + \\ + [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})]\,\mathbf{b} + [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})]\,\mathbf{c}.$$

Скалярные произведения векторных произведений, стоящие в квадратных скобках, заменим определителями по формуле (10.16)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \mathbf{bx} & \mathbf{by} \\ \mathbf{cx} & \mathbf{cy} \end{vmatrix} \mathbf{a} + \begin{vmatrix} \mathbf{cx} & \mathbf{cy} \\ \mathbf{ax} & \mathbf{ay} \end{vmatrix} \mathbf{b} + \begin{vmatrix} \mathbf{ax} & \mathbf{ay} \\ \mathbf{bx} & \mathbf{by} \end{vmatrix} \mathbf{c}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{z}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{bx} & \mathbf{by} \\ \mathbf{cx} & \mathbf{cy} \end{vmatrix} \mathbf{az} + \begin{vmatrix} \mathbf{cx} & \mathbf{cy} \\ \mathbf{ax} & \mathbf{ay} \end{vmatrix} \mathbf{bz} + \begin{vmatrix} \mathbf{ax} & \mathbf{ay} \\ \mathbf{bx} & \mathbf{by} \end{vmatrix} \mathbf{cz}.$$

Правая часть последнего равенства представляет разложение определителя третьего порядка по элементам третьего столбца

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ax} & \mathbf{ay} & \mathbf{az} \\ \mathbf{bx} & \mathbf{by} & \mathbf{bz} \\ \mathbf{cx} & \mathbf{cy} & \mathbf{cz} \end{vmatrix}. \tag{10.19}$$

Формула (10.19) позволяет выразить произведение двух смешанных произведений через скалярные произведения сомножителей.

Положив в (10.19) $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{z} = \mathbf{c}$, получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \mathbf{ab} & \mathbf{ac} \\ \mathbf{ba} & b^2 & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ca} & \mathbf{cb} & c^2 \end{vmatrix}. \tag{10.20}$$

7. Взаимные реперы. Рассмотрим репер, образованный тремя некомпланарными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Поставим следующий вопрос: нельзя ли, зная векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, найти другой репер $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, который был бы связан с исходным следующей таблицей скалярных произведений:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \\ \mathbf{a} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{b} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{c} & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad (10.21)$$

Рассмотрим один вектор второго репера, например $\mathbf{a}^*$. Согласно таблице (10.21), будем иметь

$$\mathbf{aa}^* = 1,$$
$$\mathbf{ba}^* = 0,$$
$$\mathbf{ca}^* = 0.$$

Из двух последних равенств следует, что вектор $\mathbf{a}^*$ одновременно перпендикулярен к векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и, следовательно, он коллинеарен вектору $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$:

$$\mathbf{a}^* = \lambda(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \qquad (10.22)$$

где λ — некоторое число. Для определения λ внесем найденное значение для $\mathbf{a}^*$ в равенство $\mathbf{aa}^* = 1$:

$$\mathbf{a}\lambda(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 1$$

или

$$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Пользуясь (10.22), найдем (выражения для $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$ получены круговой перестановкой):

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}. \qquad (10.23)$$

Эти формулы решают поставленную задачу. Очевидно, что если считать заданным репер $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, то репер $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ определится по аналогичным формулам

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}^* \times \mathbf{c}^*}{(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*)}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}^* \times \mathbf{a}^*}{(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*)}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*}{(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*)}, \qquad (10.24)$$

что следует из симметричности таблицы (10.21).

Таким образом, каждому реперу $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ однозначно соответствует другой репер $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, связанный с первым таблицей (10.21). Такие два репера называются *взаимными*.

Непосредственно из определения таблицы (10.21) следует, что если репер состоит из единичных взаимно перпендикулярных векторов, то он будет сам себе взаимным; обратное утверждение тоже справедливо, т. е. если $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}^* = \mathbf{c}$, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ единичны и взаимно перпендикулярны.

Пользуясь векторами взаимного репера, формуле (10.15) можно придать более простой вид — *формула Гиббса*:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}\mathbf{a}^*)\,\mathbf{a} + (\mathbf{s}\mathbf{b}^*)\,\mathbf{b} + (\mathbf{s}\mathbf{c}^*)\,\mathbf{c}. \tag{10.25}$$

Формула Гиббса является обобщением формулы разложения вектора по координатным ортам (8.21).

§ 11. ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Существует несколько форм векторного уравнения прямой линии в пространстве, каждая из которых связана со способом задания ее элементов. Рассмотрим некоторые из этих уравнений.

1. Векторно-параметрическое уравнение прямой. Прямая в пространстве вполне определяется точкой $M_0(\mathbf{r}_0)$, лежащей на прямой, и *направляющим* вектором $\mathbf{s}$, параллельным прямой. Возьмем на прямой любую точку $M(\mathbf{r})$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

будет параллелен вектору $\mathbf{s}$ и, следовательно, они будут отличаться только скалярным множителем (см. (3.6) и рис. 50)

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{s}. \tag{11.1}$$

Отсюда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{s}, \tag{11.2}$$

где λ — параметр.

Давая параметру λ различные значения, будем получать различные радиусы-векторы $\mathbf{r}$, и все они будут определять точки, лежащие на прямой. Поэтому уравнение (11.2) определяет прямую в пространстве, которая проходит через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}$; уравнение (11.2) называется *векторно-параметрическим* уравнением прямой. Из этого уравнения легко получить канонические уравнения прямой в координатной форме. Действительно, так как векторы $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{s}$ параллельны, то их проекции пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{s_z}. \tag{11.3}$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Если прямая проходит через две точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ и $M_1(\mathbf{r}_1)$, то за направляющий вектор $\mathbf{s}$, параллельный прямой, можно взять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{s}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0.$$

Внося это в уравнение (11.2), получим

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0), \tag{11.4}$$

где λ — параметр.

Соответствующие уравнения в координатной форме будут

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{11.5}$$

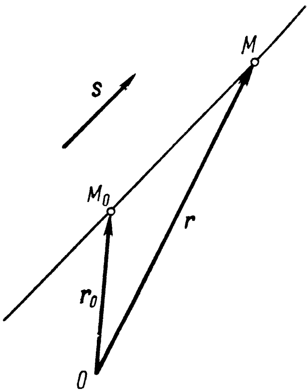

Рис. 50.

3. Плюкерово уравнение прямой в пространстве. Условие параллельности двух векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{s}$ можно, пользуясь векторным произведением, записать в виде

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{s}=0$$

или, раскрывая скобки,

$$\mathbf{r}\times\mathbf{s}=\mathbf{m}\qquad(\mathbf{m}\perp\mathbf{s}), \tag{11.6}$$

где вектор $\mathbf{m}$ равен:

$$\mathbf{m}=\mathbf{r}_0\times\mathbf{s}. \tag{11.7}$$

Из определения момента (см. (9.5)) видно, что вектор $\mathbf{m}$ равен моменту вектора $\mathbf{s}$ относительно начала координат в предположении, что вектор $\mathbf{s}$ приложен в точке M_0.

Уравнению (11.6) удовлетворяют радиусы-векторы всех точек, лежащих на прямой, поэтому это уравнение будет уравнением прямой (оно называется *плюкеровым уравнением* по имени геометра Плюкера).

В уравнении (11.6) векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{s}$ связаны с точкой $M_0(\mathbf{r}_0)$ равенством (11.7). Поэтому естественно возникает вопрос, определяет ли уравнение (11.6) при произвольных, но взаимно перпендикулярных векторах $\mathbf{m}$ и $\mathbf{s}$ некоторую прямую в пространстве. Для того чтобы ответить на этот вопрос утвердительно, достаточно показать, что уравнение (11.6) можно привести к виду (11.2). С этой целью умножим обе части этого уравнения слева векторно на $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{s})=\mathbf{s}\times\mathbf{m}.$$

Воспользуемся формулой (10.13):

$$\mathbf{r}\cdot s^2-(\mathbf{r}\mathbf{s})\,\mathbf{s}=\mathbf{s}\times\mathbf{m}.$$

Скалярное произведение $\mathbf{rs}$ определяет некоторое число, которое при переменных $\mathbf{r}$ будет переменным. Обозначим это число через $\lambda\cdot s^2$. Тогда последнее равенство можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}=\frac{1}{s^2}(\mathbf{s}\times\mathbf{m})+\lambda\mathbf{s}. \tag{11.8}$$

Это уравнение совпадает с (11.2), если только положить

$$\mathbf{r}_0=\frac{1}{s^2}(\mathbf{s}\times\mathbf{m}). \tag{11.9}$$

Пример. Даны два взаимно перпендикулярных вектора $\mathbf{s}(1,\ 1,\ -1)$ и $\mathbf{m}(3,\ 0,\ 3)$. Написать уравнения прямой, параллельной вектору $\mathbf{s}$, в форме (11.3).

Имеем (см. (9.17) и примеры):

$$\mathbf{s}(1,\ 1,\ -1),\qquad s^2=1^2+1^2+(-1)^2=3,$$

$$\frac{\mathbf{m}(3,\ 0,\ 3)}{\mathbf{s}\times\mathbf{m}(3,\ -6,\ -3)},\qquad \frac{1}{s^2}(\mathbf{s}\times\mathbf{m})=(1,\ -2,\ -1),$$

т. е. $\mathbf{r}_0(1,\ -2,\ -1)$ и уравнения (11.3) будут

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}. \tag{11.10}$$

К вопросу о переходе от плюкеровой формы уравнения прямой к параметрической форме, а затем к координатной форме (11.3) можно подойти иначе. Для того чтобы написать уравнение прямой в форме (11.2) или (11.3), нужно определить только одну точку $\mathbf{r}_0$, лежащую на данной прямой (направляющий вектор $\mathbf{s}$ задан). Для определения точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ заметим, что проекции вектора $\mathbf{m}$ выражаются через проекции векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{s}_0$ формулами (9.15):

$$\begin{aligned} y_0 s_z - z_0 s_y &= m_x, \\ z_0 s_x - x_0 s_z &= m_y, \\ x_0 s_y - y_0 s_x &= m_z, \end{aligned} \tag{11.11}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты любой точки, лежащей на данной прямой.

Легко видеть, что из этих трех уравнений независимых только два. Это следует из того, что ранг расширенной матрицы системы

$$\begin{Vmatrix} 0 & s_z & -s_y & m_x \\ -s_z & 0 & s_x & m_y \\ s_y & -s_x & 0 & m_z \end{Vmatrix}$$

равен двум (при вычислении определителей необходимо иметь в виду, что в силу ортогональности векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{m}$ между их проекциями существует следующая зависимость: $s_x m_x + s_y m_y + s_z m_z = 0$).

Так как точка $M_0(\mathbf{r}_0)$ — любая на прямой, то выберем одну координату произвольно, например, положим $z = 0$; это означает, что мы выбрали точку пересечения прямой с плоскостью Oxy. Подставим это значение выбранной координаты в уравнения (11.11) и найдем две остальные координаты. Таким образом, будут найдены координаты точки $M_0(\mathbf{r}_0)$, т. е. будет найден радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ и можно будет сразу написать уравнение (11.2) или (11.3).

Пример. Даны два взаимно перпендикулярных вектора $\mathbf{s}(1, 1, -1)$ и $\mathbf{m}(3, 0, 3)$. Написать уравнения прямой в форме (11.3).

Уравнения (11.11) имеют вид

$$\begin{aligned} -y - z &= 3, \\ z + x &= 0, \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

Положим $z=0$, тогда $y=-3$, $x=0$. Следовательно, $\mathbf{r}_0(0,\ -3,\ 0)$ и уравнения прямой в форме (11.3) будут

$$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}.$$

Эти уравнения и уравнения (11.10) определяют одну и ту же прямую. Отличие их состоит в том, что выбраны разные начальные точки.

4. Прямая как пересечение двух плоскостей. Очевидно, что прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Поэтому совокупность двух уравнений (см. (8.15))

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1\mathbf{r}+D_1&=0,\\ \mathbf{n}_2\mathbf{r}+D_2&=0\end{aligned}\qquad(11.12)$$

определяет прямую. Эти уравнения прямой не имеют преимуществ одного уравнения в параметрической форме (11.2), или уравнения в плюкеровой форме, так как члены этого уравнения непосредственно с прямой не связаны и не выражают прямо какие-либо ее элементы. Поэтому целесообразно показать, как перейти от двух уравнений (11.12) к одному уравнению (11.2) или (11.6).

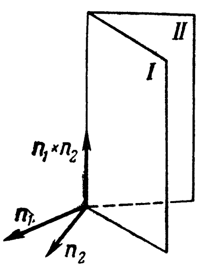

Рис. 51.

Найдем прежде всего направляющий вектор $\mathbf{s}$, параллельный линии пересечения данных плоскостей. Вектор $\mathbf{n}_1$ перпендикулярен первой плоскости, а $\mathbf{n}_2$ — второй. Вектор $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ перпендикулярен к $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ и, следовательно, параллелен обеим плоскостям одновременно, т. е. он будет параллелен линии пересечения плоскостей (рис. 51). Поэтому за направляющий вектор $\mathbf{s}$ можно взять вектор

$$\mathbf{s}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2\qquad(11.13)$$

и уравнение прямой в плюкеровой форме будет

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2)=\mathbf{m}.$$

Для определения вектора $\mathbf{m}$ раскроем в левой части этого равенства двойное векторное произведение (см. (10.13))

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{r}\mathbf{n}_2)-\mathbf{n}_2(\mathbf{r}\mathbf{n}_1)=\mathbf{m}.$$

Из уравнений (11.12) имеем

$$\mathbf{r}\mathbf{n}_1 = -D_1, \quad \mathbf{r}\mathbf{n}_2 = -D_2.$$

Отсюда

$$\mathbf{m} = D_1\mathbf{n}_2 - D_2\mathbf{n}_1$$

и плюкерово уравнение прямой примет вид

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = D_1\mathbf{n}_2 - D_2\mathbf{n}_1. \tag{11.14}$$

Это одно уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений (11.12). Пользуясь теперь (11.8), его можно привести к параметрической форме

$$\mathbf{r} = \frac{1}{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)^2}[(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times (D_1\mathbf{n}_2 - D_2\mathbf{n}_1)] + \lambda(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2). \tag{11.15}$$

§ 12. ИНВАРИАНТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОСЕЙ

1. Инварианты преобразования. Непосредственно из определения следует, что проекция вектора на ось зависит от выбора оси проекций. Поэтому в различных системах координат проекции одного и того же вектора будут различны. Несмотря на это, из проекций векторов можно построить алгебраические выражения, которые не будут зависеть от выбора системы координат; такие выражения называются *векторными инвариантами относительно преобразования или выбора осей координат.*

Приведем некоторые примеры инвариантов, рассматривая их относительно прямоугольной системы координат.

2. Первый инвариант. Модуль вектора (а следовательно, и его квадрат) как длина отрезка не зависит от того, что в пространстве будет построена какая-либо система координат. Поэтому выражение для квадрата модуля вектора через его проекции (см. (7.8)):

$$I_1 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{12.1}$$

не будет зависеть от выбора системы координат, хотя отдельные слагаемые и зависят. Следовательно, выражение (12.1) есть инвариант (он называется *первым* инвариантом). Независимость этого выражения от выбора системы координат можно проверить непосредственно с помощью формул преобразования (8.24).

Действительно, пусть произведено преобразование координат и вектор **a** в новой системе имеет проекции $a_{x'}$, $a_{y'}$ и $a_{z'}$, а в старой системе a_x, a_y и a_z. Составим выражение

$$a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2$$

и воспользуемся формулами преобразования (8.24):

$$a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2 = (\alpha_{11}a_x + \alpha_{21}a_y + \alpha_{31}a_z)^2 + (\alpha_{12}a_x + \alpha_{22}a_y + \alpha_{32}a_z)^2 + (\alpha_{13}a_x + \alpha_{23}a_y + \alpha_{33}a_z)^2$$

или, раскрывая скобки и группируя члены,

$$a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2 = (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2)\, a_x^2 + (\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2)\, a_y^2 + (\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2)\, a_z^2 + 2\,(\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23})\, a_x a_y + 2\,(\alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33})\, a_y a_z + 2(\alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13})\, a_z a_x.$$

Учитывая (8.22), будем иметь

$$a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

что подтверждает утверждение о независимости выражения I_1 от выбора системы координат.

3. Второй инвариант. Скалярное произведение двух векторов по своему определению не связано с системой координат, поэтому выражение (см. (8.10))

$$I_2 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{12.2}$$

есть инвариант относительно преобразования осей (*второй* инвариант).

Естественно, что первый инвариант можно рассматривать как частный случай второго (при $\mathbf{a} = \mathbf{b}$).

4. Третий инвариант. Смешанное произведение трех векторов по своему определению также не зависит от системы координат. Поэтому выражение (см. (10.1))

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{12.3}$$

является инвариантным относительно преобразования осей.

5. Производные инварианты. Рассмотренные три инварианта независимы друг от друга, причем первый инвариант относится к проекциям одного вектора, второй — к проекциям двух векторов, третий — к проекциям трех векторов. Последние два инварианта были получены из независимости произведений (скалярного и смешанного) от системы координат. Естественно, что можно поставить вопрос об использовании других произведений (например, векторного и двойного векторного) для нахождения новых инвариантов. Отметим, что ни векторное, ни двойное векторное произведения не дают новых независимых инвариантов. Действительно, векторное произведение двух векторов **a** и **b** по своему определению не зависит от системы координат. Поэтому модуль этого произведения (будем рассматривать его квадрат) есть инвариант относительно преобразования системы координат (см. (7.8) и (9.15)):

$$I=(a_y b_z - a_z b_y)^2+(a_z b_x - a_x b_z)^2+(a_x b_y - a_y b_x)^2. \quad (12.4)$$

Покажем, что этот инвариант есть следствие первых двух. Для этого воспользуемся тождеством Лагранжа (9.19) и перепишем его в следующем виде:

$$I=\left(a_x^2+a_y^2+a_z^2\right)\left(b_x^2+b_y^2+b_z^2\right)-(a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z)^2$$

или, на основании (12.1) и (12.2),

$$I=I_1(\mathbf{a})\,I_1(\mathbf{b})-I_2^2.$$

Читатель без труда докажет, что двойное векторное произведение также не дает независимого инварианта.

ГЛАВА II

АЛГЕБРА СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

§ 13. МОМЕНТ ВЕКТОРА ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ. ЗАДАНИЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО ВЕКТОРА

1. Система обозначений. Условимся в следующих обозначениях. Большими буквами латинского алфавита будем обозначать точки, а буквами греческого алфавита будем обозначать прямые линии. Символ $\mathbf{a}_A$ будет обозначать, что вектор $\mathbf{a}$ приложен к точке A, а символ $\mathbf{a}_\alpha$ — что вектор $\mathbf{a}$ лежит на прямой α. Двойные индексы очевидны: так, символ $\mathbf{a}_{\alpha A}$ означает, что вектор $\mathbf{a}$ лежит на прямой α и приложен в точке A.

С точки зрения математического равенства векторов (см. стр. 14) эти индексы ничего не изменяют, так что векторы $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\mathbf{a}_\alpha$, $\mathbf{a}_{\alpha A}$, $\mathbf{a}_{\alpha B}$ и т. д. математически равны:

$$\mathbf{a}_{\alpha A} = \mathbf{a}_{\alpha B} = \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_\alpha = \ \ldots \ = \mathbf{a}. \qquad (13.1)$$

Цифровые индексы и индексы из маленьких букв латинского алфавита будут означать номер вектора, поэтому $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$ и т. д. означают разные векторы. Символ $\mathbf{a}_{3\gamma A}$ означает, что вектор $\mathbf{a}_3$ лежит на прямой γ и приложен в точке A. Векторы $\mathbf{a}_{5A}$ и $\mathbf{a}_{5B}$ математически равны, но векторы $\mathbf{a}_{1A}$ и $\mathbf{a}_{5A}$ не равны между собой.

Эти обозначения будем применять для заданной системы (совокупности) векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Радиусы-векторы точек будем обозначать знаком $\mathbf{r}$. Символ $\mathbf{r}_A$ будет означать, что радиус-вектор проведен из данного полюса O в данную точку A, т. е. если O — начало радиуса-вектора, то $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$.

2. Момент вектора относительно точки. В § 9 в примерах было дано определение момента вектора относительно точки, а именно: *моментом вектора* $\mathbf{a}_A$ *относительно* *точки O называется векторное произведение радиуса-вектора* $\mathbf{r}_A$ *на данный вектор* $\mathbf{a}_A$. Обозначается момент вектора $\mathbf{a}_A$ относительно точки O символом $\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A)$ или $\mathrm{mom}_O(\mathbf{a}_A)$:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_A, \tag{13.2}$$

где $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$.

Из этого определения вытекают следующие очевидные свойства момента вектора (рис. 52).

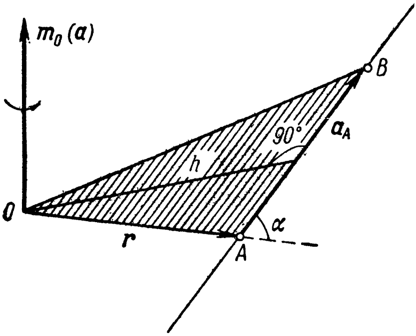

Рис. 52.

1. Момент перпендикулярен к плоскости, проведенной через данную точку и вектор.

2. Направлен момент в такую сторону, из которой переход от начала вектора $\mathbf{a}_A$ к его концу виден справа налево (для правой системы).

3. Модуль момента равен произведению модуля данного вектора $\mathbf{a}_A$ на плечо вектора h (*плечом* вектора относительно точки называется расстояние от точки до линии действия вектора).

Действительно, из определения момента имеем:

$$|\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A)| = r_A a \cdot \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{a}_A$.

Из рис. 52 видно, что

$$h = r_A \sin(\pi - \alpha) = r_A \sin\alpha.$$

Поэтому

$$|\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A)| = ah, \tag{13.3}$$

что доказывает третье свойство.

4. Приложен момент в точке, относительно которой он вычисляется (это не является обязательным).

Примечание 1. Если точка O лежит на линии действия вектора, то его момент относительно этой точки равен нулю ($h = 0$).

Примечание 2. Из формулы $|\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A)| = ah$ и рис. 52 следует, что модуль момента вектора относительно точки равен удвоенной площади треугольника, у которого основанием служит вектор $\mathbf{a}_A$ и вершиной точка O:

$$|\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A)| = 2S_{\triangle OAB}. \tag{13.4}$$

Момент вектора не зависит от выбора точки приложения вектора на линии его действия. Это утверждение непосредственно следует из третьего свойства момента, однако его можно легко доказать и формально, пользуясь формулой (13.2). Действительно, возьмем на линии действия вектора две точки A и B и будем считать, что в первом случае вектор $\mathbf{a}$ имеет начало в точке A, а во втором случае

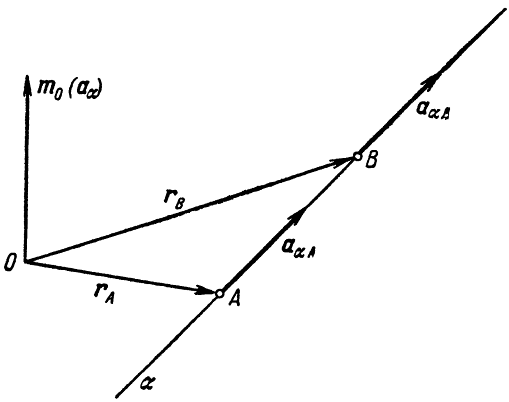

Рис. 53.

его начало совпадает с точкой B (рис. 53). Согласно (13.2) будем иметь

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_{\alpha A}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{\alpha A},$$

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_{\alpha B}) = \mathbf{r}_B \times \mathbf{a}_{\alpha B}.$$

Из рис. 53 видно, что $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}$. Следовательно,

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_{\alpha B}) = (\mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}) \times \mathbf{a}_{\alpha B} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{\alpha B} + \overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}_{\alpha B}.$$

Учтем теперь, что $\mathbf{a}_{\alpha B} = \mathbf{a}_{\alpha A}$ (см. (13.1)) и $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}_{\alpha B} = 0$ (как векторное произведение двух коллинеарных векторов). Поэтому

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_{\alpha B}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{\alpha A} = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_{\alpha A}),$$

что доказывает сделанное замечание.

На этом основании при вычислении момента не обязательно указывать точку приложения данного вектора $\mathbf{a}$ — достаточно указать линию его действия

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_\alpha) = \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{a}_\alpha \tag{13.5}$$

или еще короче

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \mathbf{a}, \tag{13.5'}$$

где $\mathbf{r}_\alpha$ или $\mathbf{r}$ — радиус-вектор любой точки, лежащей на линии действия вектора. Если же нужно подчеркнуть точку приложения вектора, в частности, если речь идет о связанном векторе, то будем пользоваться обозначением (13.2).

Легко видеть, что одному и тому же моменту $\mathbf{m}_O$ отвечает бесчисленное множество векторов $\mathbf{a}$, моменты которых относительно данной точки O равны $\mathbf{m}_O$. Действительно,

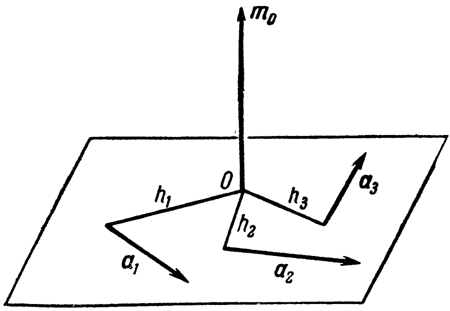

Рис. 54.

все векторы, лежащие в плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно к $\mathbf{m}_O$, и удовлетворяющие условию (13.3)

$$ah = m_O,$$

будут иметь момент относительно O, равный $\mathbf{m}_O$. На рис. 54 показаны три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, лежащие в одной плоскости, для которых $a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3$. Для этих векторов будем иметь:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_1) = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_2) = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_3) = \mathbf{m}_O. \tag{13.6}$$

3. Проекции момента. Пусть x_O, y_O, z_O — координаты точки O, относительно которой берется момент вектора $\mathbf{a}$. Согласно (6.11) проекции вектора $\mathbf{r}$ будут:

$$r_x = x - x_O, \quad r_y = y - y_O, \quad r_z = z - z_O,$$

где x, y и z — координаты любой точки, лежащей на линии действия вектора $\mathbf{a}$. Пользуясь (13.5′) и (9.15), получим проекции момента:

$$\begin{aligned} m_{Ox}(\mathbf{a}) &= (y - y_O)\,a_z - (z - z_O)\,a_y, \\ m_{Oy}(\mathbf{a}) &= (z - z_O)\,a_x - (x - x_O)\,a_z, \\ m_{Oz}(\mathbf{a}) &= (x - x_O)\,a_y - (y - y_O)\,a_x, \end{aligned} \tag{13.7}$$

где $m_{Ox}(\mathbf{a})$, $m_{Oy}(\mathbf{a})$, $m_{Oz}(\mathbf{a})$ — проекции вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{a})$ на оси x, y, z соответственно.

В частном, но весьма распространенном случае точка O, относительно которой вычисляется момент $\mathbf{m}_O(\mathbf{a})$, совпадает с началом координат. В этом случае x_O, y_O и z_O равны нулю и последние формулы принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} m_{Ox}(\mathbf{a}) &= ya_z - za_y, \\ m_{Oy}(\mathbf{a}) &= za_x - xa_z, \\ m_{Oz}(\mathbf{a}) &= xa_y - ya_x. \end{aligned} \tag{13.8}$$

4. Момент вектора относительно оси. Пусть в пространстве дан вектор $\mathbf{a}_A$ и ось e, направление которой задано ортом $\mathbf{e}$. Возьмем на оси e точку O и найдем момент вектора $\mathbf{a}_A$ относительно этой точки; очевидно, что $\mathbf{m}_O(\mathbf{a})$ будет зависеть по величине и направлению от выбранной точки O. Однако *проекция этого момента на ось e не зависит от выбора точки на оси.* Докажем это. Пусть на оси e выбраны две точки O и O_1. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A) &= \overrightarrow{OA} \times \mathbf{a}_A, \\ \mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{a}_A) &= \overrightarrow{O_1A} \times \mathbf{a}_A, \end{aligned}$$

где A — точка приложения вектора $\mathbf{a}$.

Очевидно, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A}$ (рис. 55). Поэтому

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A) = \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{a}_A + \overrightarrow{O_1A} \times \mathbf{a}_A$$

или

$$\mathbf{m}_O = \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{a}_A + \mathbf{m}_{O_1}$$

(для сокращения записи положено $\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_A) = \mathbf{m}_O$).

Умножим обе части этого равенства скалярно на орт оси $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{m}_O\mathbf{e} = (\overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{a}_A)\,\mathbf{e} + \mathbf{m}_{O_1}\mathbf{e}.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как в этом смешанном произведении векторы $\overrightarrow{OO_1}$ и $\mathbf{e}$ коллинеарны. Следовательно,

$$\mathbf{m}_O \cdot \mathbf{e} = \mathbf{m}_{O_1} \cdot \mathbf{e},$$

что на основании (8.18) можно переписать в следующем виде:

$$\text{Пр}_e\mathbf{m}_O = \text{Пр}_e\mathbf{m}_{O_1}.$$

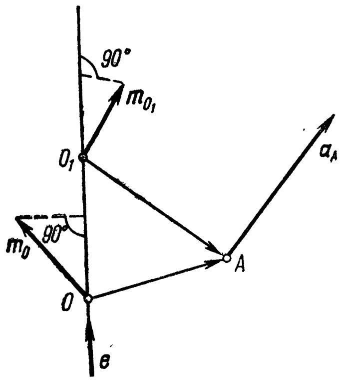

Рис. 55.

Доказанное свойство дало основание ввести следующее определение: *моментом вектора* **a** *относительно оси e называется проекция на эту ось момента данного вектора относительно любой точки O данной оси*

$$m_e(\mathbf{a}) = (\mathbf{m}_O(\mathbf{a}))_e, \tag{13.9}$$

где O — любая точка на оси e.

Согласно определению и (8.18) имеем

$$m_e(\mathbf{a}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{a})\,\mathbf{e} \tag{13.10}$$

или

$$m_e(\mathbf{a}) = (\mathbf{r},\ \mathbf{a},\ \mathbf{e}). \tag{13.10'}$$

Пользуясь выражением для смешанного произведения (10.3), получим

$$m_e(a)=\begin{vmatrix} x-x_O & y-y_O & z-z_O \\ a_x & a_y & a_z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}, \tag{13.11}$$

где x_O, y_O, z_O — координаты любой точки на оси e; x, y, z — координаты любой точки на линии действия вектора; a_x, a_y, a_z — проекции вектора **a** и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы оси e.

Если ось, относительно которой вычисляется момент вектора, проходит через начало координат, то $x_O=y_O=z_O=0$ и последняя формула принимает более простой вид

$$m_e(\mathbf{a})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}. \tag{13.12}$$

Пусть ось e совпадает с осью x. Тогда $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=\cos\gamma=0$ и, следовательно,

$$m_x(\mathbf{a})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=ya_z-za_y.$$

Сравнивая с (13.8), видим, что $m_x(\mathbf{a})=m_{Ox}(\mathbf{a})$, аналогично $m_y(\mathbf{a})=m_{Oy}(\mathbf{a})$ и $m_z(\mathbf{a})=m_{Oz}(\mathbf{a})$, т. е. *моменты относительно осей координат равны проекциям момента относительно начала координат на соответствующие оси* (этот вывод следует также непосредственно из определений). На этом основании в формулах (13.8) можно опустить индекс O и писать просто m_x, m_y и m_z:

$$\begin{aligned} m_x(\mathbf{a})&=ya_z-za_y, \\ m_y(\mathbf{a})&=za_x-xa_z, \\ m_z(\mathbf{a})&=xa_y-ya_x. \end{aligned} \tag{13.13}$$

Момент вектора относительно оси удобно часто вычислять не с помощью формул (13.9)—(13.13), а из простых геометрических соображений. Построим плоскость π, перпендикулярную к оси, обозначим точку пересечения плоскости и оси буквой O и построим ортогональную составляющую данного вектора на плоскости $\mathbf{a}_\pi$ (рис. 56). По

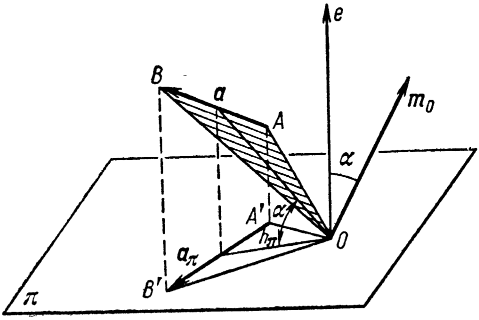

Рис. 56.

определению момента вектора относительно оси имеем

$$m_e = m_O \cos\alpha,$$

где $\mathbf{m}_O$ — момент $\mathbf{a}$ относительно точки O и α — угол между осью e и $\mathbf{m}_O$.

Пользуясь (13.4), можно написать

$$m_e = 2S_{\triangle OAB} \cos\alpha.$$

Учтем теперь, что угол между плоскостью треугольника OAB и плоскостью π равен α (так как $\mathbf{m}_O \perp OAB$ и $e \perp \pi$). Поэтому $S_{\triangle OA'B'} = \pm S_{\triangle OAB} \cos\alpha$ и, следовательно,

$$m_e = \pm 2S_{\triangle OA'B'}$$

$\left(\text{знак } +, \text{ если } \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ и } -, \text{ если } \alpha > \frac{\pi}{2}\right)$.

Но удвоенная площадь треугольника $OA'B'$ равна произведению основания a_π на высоту h_π. Поэтому

$$m_e = \pm a_\pi h_\pi. \tag{13.14}$$

Таким образом, для того чтобы вычислить момент вектора относительно оси, достаточно:

1. спроектировать данный вектор на плоскость, перпендикулярную к оси;

2. умножить величину этой проекции a_π на расстояние h_π от точки пересечения плоскости с осью до линии действия составляющей.

Тогда момент вектора относительно оси будет равен этому произведению, взятому со знаком $+$, если со стороны положительного направления оси переход от начала вектора $\mathbf{a}_\pi$ к его концу виден справа налево $\left(\text{в этом случае } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, и со знаком — в противном случае.

Это правило особенно удобно в тех случаях, когда вектор лежит в плоскости, перпендикулярной к оси; в сложных случаях удобнее пользоваться общей формулой.

Очень важное значение имеет вопрос о равенстве нулю момента вектора относительно оси. Из (13.14) видно, что $m_e = 0$ в двух случаях: либо $a_\pi = 0$, либо $h_\pi = 0$. В первом случае вектор **a** параллелен оси, а во втором случае линия действия вектора пересекает ось. Таким образом, *если вектор параллелен оси или линия его действия пересекает ось, то момент вектора относительно оси равен*

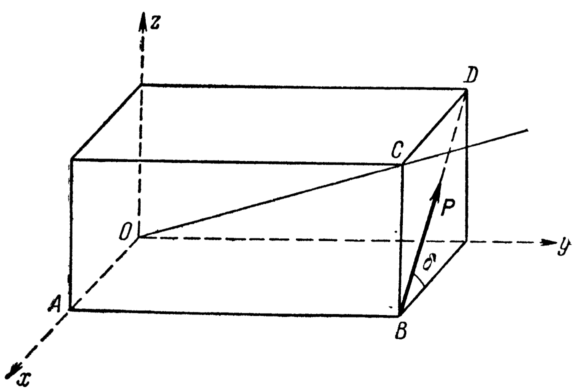

Рис. 57.

нулю. Этот вывод можно получить также из (13.9) или (13.10).

Пример. На рис. 57 изображен прямоугольный параллелепипед со сторонами $OA = 3$ *см*, $AB = 12$ *см*, $BC = 4$ *см*. По диагонали BD действует сила $\mathbf{P}$, равная по модулю

30 *кГ*. Определить момент этой силы относительно точки O и ее момент относительно оси OC.

Построим на сторонах параллелепипеда систему координатных осей xyz (рис. 57) и найдем проекции силы $\mathbf{P}$ на эти оси.

Имеем

$$BD=\sqrt{4^2+3^2}=5\ \textit{см},\quad \cos\delta=\frac{3}{5},\quad \sin\delta=\frac{4}{5},$$

$$P_x=-P\cos\delta=-18\ \textit{кГ},\quad P_y=0,\quad P_z=P\sin\delta=24\ \textit{кГ},$$

$$x=3\ \textit{см},\quad y=12\ \textit{см},\quad z=0.$$

Согласно (13.13) или (13.14) получим

$$m_x(\mathbf{P})=12\cdot 24=288\ \textit{кГсм},$$
$$m_y(\mathbf{P})=-3\cdot 24=-72\ \textit{кГсм},$$
$$m_z(\mathbf{P})=-12\cdot(-18)=216\ \textit{кГсм}.$$

Отсюда

$$|\mathbf{m}_O(\mathbf{P})|=\sqrt{288^2+72^2+216^2}=96\sqrt{14}\ \textit{кГсм}\simeq$$
$$\simeq 359\ \textit{кГсм}=3{,}59\ \textit{кГм}.$$

Для определения момента относительно оси OC найдем длину диагонали параллелепипеда OC, а затем направляющие косинусы:

$$OC=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13\ \textit{см},$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{13},\quad \cos\beta=\frac{12}{13},\quad \cos\gamma=\frac{4}{13}.$$

Пользуясь теперь формулой (13.12), будем иметь:

$$m_e(\mathbf{P})=\begin{vmatrix} 3 & 12 & 0\\ -18 & 0 & 24\\ \frac{3}{13} & \frac{12}{13} & \frac{4}{13}\end{vmatrix}=\frac{864}{13}\ \textit{кГсм}\simeq 66{,}5\ \textit{кГсм}.$$

При вычислениях мы взяли на линии действия вектора $\mathbf{P}$ точку $B(3,\ 12,\ 0)$. Читателю полезно проверить, что результаты не изменятся, если на линии действия вектора $\mathbf{P}$ выбрать любую другую точку, например точку $D(0,\ 12,\ 4)$.

5. Задание скользящего вектора его проекциями и моментами относительно координатных осей. В § 7 было показано, что скользящий вектор может быть задан с помощью пяти независимых чисел: трех его проекций и двух координат какой-либо точки на линии его действия. Такой способ задания скользящего вектора не совсем удобен в силу его несимметричности. Покажем, что скользящий вектор вполне определяется тремя его проекциями: a_x, a_y, a_z и тремя его моментами относительно координатных осей: $m_x(\mathbf{a})$, $m_y(\mathbf{a})$, $m_z(\mathbf{a})$ или в более краткой записи: m_x, m_y и m_z. Действительно, модуль вектора $\mathbf{a}$ и его направляющие косинусы вполне определяются тремя проекциями: a_x, a_y и a_z (см. § 7, п. 4, стр. 49). Уравнение линии действия вектора $\mathbf{a}$ проще всего написать в плюкеровой форме (см. (11.6)):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{m},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор любой точки линии действия скользящего вектора $\mathbf{a}$, а векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{m}$ заданы своими проекциями.

Это уравнение линии действия скользящего вектора $\mathbf{a}$ можно привести к параметрической форме (11.8), а затем перейти к координатной форме (11.3).

Так как для задания скользящего вектора достаточно пяти независимых величин, то между шестью числами: a_x, a_y, a_z, m_x, m_y и m_z—должна существовать одна зависимость. Последнюю легко установить, если учесть, что вектор $\mathbf{m}_O(\mathbf{a})$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{a}$ и, следовательно, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}_O = 0$, или в координатной форме:

$$a_x m_x + a_y m_y + a_z m_z = 0. \tag{13.15}$$

Этому условию ортогональности должны удовлетворять шесть величин: a_x, a_y, a_z, m_x, m_y, m_z.

§ 14. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

1. Система векторов. *Совокупность векторов* называется *системой векторов*. Систему векторов будем обозначать фигурными скобками, внутри которых будут стоять векторы, образующие систему. Таким образом, символ $\{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n\}$ означает, что векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ образуют систему.

Под *суммой* нескольких систем будем понимать систему, состоящую из векторов данных систем:

$$\{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n\} + \{\mathbf{b}_1; \ldots; \mathbf{b}_k\} + \{\mathbf{c}_1; \ldots; \mathbf{c}_p\} = \\ = \{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n; \mathbf{b}_1; \ldots; \mathbf{b}_k; \mathbf{c}_1; \ldots; \mathbf{c}_p\}.$$

Аналогично определяется *разность* систем:

$$\{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n; \mathbf{a}_{n+1}; \ldots; \mathbf{a}_{n+k}\} - \{\mathbf{a}_{n+1}; \ldots; \mathbf{a}_{n+k}\} = \\ = \{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n\}.$$

Две системы векторов:

$$\left\{\mathbf{a}_{1A_1}; \ldots; \mathbf{a}_{nA_n}\right\}; \quad \left\{-\mathbf{a}_{1A_1}; \ldots; -\mathbf{a}_{nA_n}\right\}, \qquad (14.1)$$

из которых одна получена из другой простой заменой каждого вектора на равнопротивоположный с общей точкой приложения, называются *взаимно противоположными системами векторов*. Если система состоит из скользящих векторов, то вместо общей точки приложения достаточно, чтобы равнопротивоположные векторы лежали на общей линии действия

$$\left\{\mathbf{a}_{1\alpha}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\right\}; \quad \left\{-\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; -\mathbf{a}_{n\alpha_n}\right\}. \qquad (14.1')$$

Система, состоящая из нуль-векторов, называется *нулевой* системой.

2. Главный вектор системы векторов. В дальнейшем, если нет специальной оговорки, будем считать, что векторы, входящие в систему $\left\{\mathbf{a}_{iA_i}\right\}$, имеют одну природу и их модули одной размерности, так что эти векторы можно складывать и вычитать.

Главным вектором системы векторов называется сумма всех векторов, составляющих систему. Главный вектор системы будем обозначать символом $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n. \qquad (14.2)$$

Пользуясь тем, что проекция суммы векторов равна сумме проекций составляющих, главный вектор легче всего определить его проекциями (см. § 6, п. 7):

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} a_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} a_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} a_{iz}. \qquad (14.2')$$

Необходимо иметь в виду, что векторы $\mathbf{a}_{iA_i}$ могут быть как свободными, так и скользящими и несвободными. Главный вектор $\mathbf{R}$, т. е. сумма векторов, определяется пока формально, и вопрос о точке приложения главного вектора, а также вопрос об эквивалентности сейчас не стоит. Естественно, что главный вектор не зависит от начальной точки, из которой строится многоугольник векторов и его замыкающий вектор $\mathbf{R}$.

Очевидно, что если данная система состоит из суммы нескольких систем, то главный вектор этой системы равен сумме главных векторов слагаемых систем, т. е. если $\mathbf{R}$ — главный вектор системы

$$\left\{\mathbf{a}_{1A_1}; \ldots; \mathbf{a}_{nA_n}\right\} + \left\{\mathbf{b}_{1B_1}; \ldots; \mathbf{b}_{kB_k}\right\},$$

то

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \tag{14.3}$$

где $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ — главные векторы систем $\left\{\mathbf{a}_{iA_i}\right\}$ и $\left\{\mathbf{b}_{jB_j}\right\}$ соответственно.

Для того чтобы главный вектор системы был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы сумма данных векторов равнялась нулю:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = 0. \tag{14.4}$$

Это векторное равенство эквивалентно трем скалярным:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{iz} = 0. \tag{14.4'}$$

3. Главный момент системы векторов. Выберем в пространстве произвольную точку O (полюс) и найдем моменты всех векторов относительно этой точки:

$$\mathbf{m}_O\left(\mathbf{a}_{1A_1}\right) = \mathbf{r}_{A_1} \times \mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{m}_O\left(\mathbf{a}_{nA_n}\right) = \mathbf{r}_{A_n} \times \mathbf{a}_n.$$

Главным моментом системы векторов относительно полюса O называется сумма моментов всех векторов, составляющих систему, относительно того же полюса:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O\left(\mathbf{a}_{iA_i}\right) \tag{14.5}$$

или

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{A_i} \times \mathbf{a}_i, \tag{14.5'}$$

где $\mathbf{M}_O$ — главный момент системы относительно полюса O.

Главный момент, так же как и главный вектор, удобнее всего определять его проекциями:

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_{Ox}(\mathbf{a}_i), \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oy}(\mathbf{a}_i), \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}(\mathbf{a}_i). \tag{14.6}$$

Если точка O совпадает с началом координат, то проекции моментов данных векторов на оси координат равны их моментам относительно осей x, y, z. В этом случае индекс полюса у слагаемых моментов можно опустить, и проекции главного момента будут равны

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{a}_i), \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{a}_i), \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{a}_i), \tag{14.6'}$$

где $m_x(\mathbf{a}_i)$, $m_y(\mathbf{a}_i)$, $m_z(\mathbf{a}_i)$ — моменты вектора $\mathbf{a}_i$ относительно соответствующих осей координат.

Очевидно, что главный момент системы, состоящей из суммы нескольких систем, равен сумме главных моментов слагаемых систем, т. е. если $\mathbf{M}_O$ — главный момент системы

$$\{\mathbf{a}_{1A_1}; \ldots; \mathbf{a}_{nA_n}\} + \{\mathbf{b}_{1B_1}; \ldots; \mathbf{b}_{kB_k}\},$$

то

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2}, \tag{14.7}$$

где $\mathbf{M}_{O1}$ и $\mathbf{M}_{O2}$ — главные моменты относительно того же полюса O систем $\{\mathbf{a}_{iA_i}\}$ и $\{\mathbf{b}_{jB_j}\}$ соответственно.

Для того чтобы главный момент системы векторов относительно полюса O был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех векторов относительно того же полюса равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_{iA_i}) = 0, \tag{14.8}$$

что эквивалентно трем аналитическим уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{Ox}(\mathbf{a}_{iA_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_{Oy}(\mathbf{a}_{iA_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}(\mathbf{a}_{iA_i}) = 0. \tag{14.8'}$$

Если $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ — главный вектор и главный момент системы $\{\mathbf{a}_{iA_i}\}$, то главный вектор и главный момент противоположной системы $\{-\mathbf{a}_{iA_i}\}$ (см. (14.1)) будут, очевидно, равны $-\mathbf{R}$ и $-\mathbf{M}_O$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\{-\mathbf{a}_{iA_i}\} &= -\mathbf{R}\{\mathbf{a}_{iA_i}\}, \\ \mathbf{M}_O\{-\mathbf{a}_{iA_i}\} &= -\mathbf{M}_O\{\mathbf{a}_{iA_i}\}. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Из равенств (14.9), (14.3) и (14.7) следует, что *главный вектор и главный момент суммы двух взаимно противоположных систем равны нулю.*

4. Система двух равнопротивоположных векторов. Рассмотрим в качестве примера простейшую систему, состоящую из двух равных по величине, действующих по одной прямой, но противоположно направленных векторов $\mathbf{a}_{\alpha A}$ и $-\mathbf{a}_{\alpha B}$, где A и B — две произвольные точки на α (в частности, они могут совпадать). Так как совокупность этих двух векторов можно рассматривать как сумму двух взаимно противоположных систем, то главный вектор и главный момент этой системы равны нулю. Легко доказать, что справедливо и обратное утверждение, а именно: если главный вектор и главный момент системы двух векторов равны нулю, то эта система состоит из двух векторов, равных по величине, действующих по одной прямой и направленных в противоположные стороны. Действительно, пусть система состоит из двух векторов $\mathbf{a}_A$ и $\mathbf{b}_B$. По условию главный вектор и главный момент этой системы равны нулю, т. е.

$$\mathbf{a}_A + \mathbf{b}_B = 0,$$

$$\overrightarrow{OA} \times \mathbf{a}_A + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{b}_A = 0,$$

где O — произвольная точка пространства.

Из первого равенства имеем

$$\mathbf{b}_B = -\mathbf{a}_A = -\mathbf{a}$$

и, следовательно, векторы $\mathbf{b}_B$ и $\mathbf{a}_A$ равны по величине, параллельны и противоположно направлены. Осталось показать, что эти векторы не только параллельны, но и лежат на одной прямой. Для этого используем второе равенство, заменив в нем вектор $\mathbf{b}_B$ на равный ему вектор — $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_A$ — на $\mathbf{a}$:

$$\overrightarrow{OA} \times \mathbf{a} - \overrightarrow{OB} \times \mathbf{a} = 0.$$

Отсюда

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \times \mathbf{a} = 0,$$

но разность векторов $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ равна вектору $\overrightarrow{AB}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a} = 0.$$

Из этого равенства следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т. е. прямая, соединяющая точки приложения векторов $\mathbf{a}_A$ и $\mathbf{b}_B$, параллельна этим векторам. Это означает, что данные векторы не только параллельны, но и действуют по одной прямой. Таким образом, справедлива следующая теорема: *для того чтобы главный вектор и главный момент системы двух векторов равнялись нулю, необходимо и достаточно, чтобы эти векторы имели равные модули, действовали по одной прямой и были бы направлены в противоположные стороны.*

5. Первая теорема Вариньона. *Главный момент системы векторов, имеющих одно общее начало A, равен моменту суммы векторов, приложенной в той же точке A* (все моменты вычисляются относительно одного и того же полюса O).

Доказательство. По определению имеем

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{iA}.$$

Вынесем общий множитель $\mathbf{r}_A$ за знак суммы. Тогда последовательно получим

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_{iA} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{R}_A = \mathbf{m}_O(\mathbf{R}_A),$$

что доказывает теорему ($\mathbf{R}$ — сумма данных векторов).

6. Изменение главного момента с изменением полюса. Введенные определения достаточны для вывода математических условий эквивалентности двух систем скользящих векторов, однако для приведения системы к простейшему виду понадобятся некоторые дополнительные сведения о главном моменте и главном векторе системы. Так как эти сведения вытекают непосредственно из сделанных определений, то рационально изложить их в этом параграфе.

Момент вектора зависит от выбора полюса. Рассмотрим, как изменится главный момент с изменением полюса. Главные моменты системы векторов относительно полюсов O и O_1 по определению соответственно равны

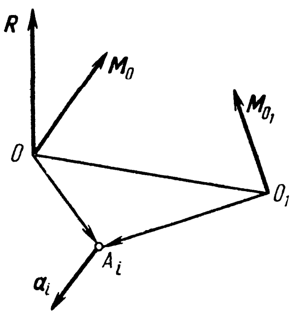

Рис. 58.

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \times \mathbf{a}_i,$$

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1A_i} \times \mathbf{a}_i,$$

где A_i — точка приложения вектора $\mathbf{a}_i$.

Очевидно, что $\overrightarrow{O_1A_i} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_i}$ (рис. 58). Поэтому

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_i}) \times \mathbf{a}_i$$

или, раскрывая скобки и вынося общий множитель $\overrightarrow{O_1O}$ за знак суммы:

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \times \mathbf{a}_i + \overrightarrow{O_1O} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i.$$

Первая сумма равна $\mathbf{M}_O$, а вторая — главному вектору $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{R}. \qquad (14.10)$$

Второе слагаемое по определению равно моменту главного вектора $\mathbf{R}$ относительно нового полюса O_1 в предположении, что главный вектор $\mathbf{R}$ приложен в старом полюсе O, т. е. $\overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{R} = \mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{R}_O)$. Таким образом,

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{R}_O), \tag{14.11}$$

что дает следующую теорему:

Теорема. *Главный момент системы векторов относительно нового полюса O_1 равен сумме главного момента относительно старого полюса O и момента главного вектора системы относительно нового полюса O_1 в предположении, что главный вектор* $\mathbf{R}$ *приложен в старом полюсе O.*

Из этой теоремы вытекают очень важные следствия.

Следствие 1. Главный момент системы векторов одинаков для всех точек прямой, параллельной главному вектору.

Следствие 2. Если главный вектор системы равен нулю, то главный момент не зависит от выбора полюса.

Следствие 3. Если главный вектор равен нулю и существует точка, относительно которой главный момент также равен нулю, то главный момент будет равен нулю относительно любого другого полюса.

7. Инварианты системы векторов. Рассмотрим систему векторов $\{\mathbf{a}_{1A_1}; \ldots; \mathbf{a}_{nA_n}\}$ и вычислим главный вектор системы $\mathbf{R}$. Очевидно, что величина и направление главного вектора не зависят от того, в какой точке пространства мы выберем его начало (по определению главного вектора). Поэтому главный вектор называют *первым инвариантом системы векторов.*

В более узком смысле этого слова под первым инвариантом системы векторов будем понимать независимость модуля главного вектора от выбора полюса

$$I_1 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \tag{14.12}$$

Возьмем теперь две произвольные точки O и O_1 и вычислим относительно этих точек главные моменты $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{M}_{O_1}$. Очевидно, что при $\mathbf{R} \neq 0$ эти моменты будут, вообще говоря, различны (см. (14.10) и следствия). Составим скалярное произведение $\mathbf{M}_{O_1}\mathbf{R}$ и воспользуемся выражением (14.11)

$$\mathbf{M}_{O_1}\mathbf{R} = [\mathbf{M}_O + \mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{R}_O)]\,\mathbf{R}$$

или

$$\mathbf{M}_{O_1}\mathbf{R} = \mathbf{M}_O\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{R}_O).$$

Учтем теперь, что скалярное произведение векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{m}_{O_1}(\mathbf{R}_O)$ равно нулю (так как эти векторы взаимно перпендикулярны). Поэтому

$$\mathbf{M}_{O_1}\mathbf{R} = \mathbf{M}_O\mathbf{R},$$

т. е. *скалярное произведение главного момента системы векторов на главный вектор той же системы не зависит от выбора полюса.* На этом основании вторым инвариантом системы векторов называют скалярное произведение главного вектора на главный момент

$$I_2 = \mathbf{M}_O\mathbf{R} \tag{14.13}$$

или в проекциях

$$I_2 = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z, \tag{14.13'}$$

где M_x, M_y, M_z — проекции главного момента, вычисленного относительно произвольной точки пространства, например относительно начала координат, и R_x, R_y, R_z — проекции главного вектора.

Непосредственно из определений следует, что инварианты системы векторов I_1 и I_2 являются одновременно инвариантами и относительно преобразований осей (см. (12.1) и (12.2)), однако смешивать эти понятия нельзя.

При главном векторе $\mathbf{R}$, отличном от нуля, второму инварианту можно дать очень простую геометрическую интерпретацию. На основании определения скалярного произведения второй инвариант можно записать в следующей форме:

$$I_2 = M_O R \cos\varphi_O,$$

где φ_O — угол между векторами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$. Так как главный вектор $\mathbf{R}$ не связан с выбором точки O, то выражение

$$M_O \cos\varphi_O = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}} \tag{14.14}$$

не зависит от выбора полюса. С другой стороны, произведение $M_O \cos\varphi_0$ равно проекции главного момента на направление главного вектора. Поэтому при $\mathbf{R} \neq 0$ *проекция главного момента на направление главного вектора не зависит от выбора полюса O, относительно которого* *вычисляется главный момент* $\mathbf{M}_O$ (*рис.* 59), *но сам главный момент* $\mathbf{M}_O$ *зависит от выбора полюса.*

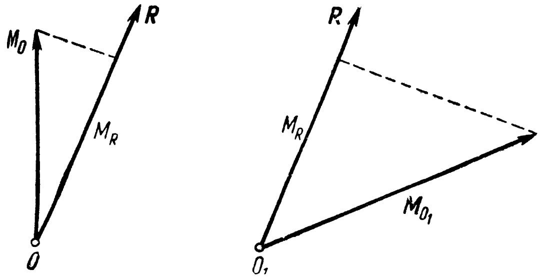

Рис. 59.

Величина этой проекции определяется формулой

$$M_{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{MR}}{R} \tag{14.15}$$

или

$$M_{\mathbf{R}} = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}}. \tag{14.16}$$

8. Минимальный момент и центральная ось системы. Рассмотрим выражение для проекции главного момента $\mathbf{M}_O$ на главный вектор (14.14); при этом, естественно, предполагается, что $\mathbf{R} \neq 0$:

$$M_O \cos\varphi_O = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}} = \text{const}.$$

В произведении, стоящем в левой части равенства, оба множителя M_O и $\cos\varphi_O$ зависят от выбора полюса O, но их произведение для данной системы векторов — величина постоянная. Из этого следует, что *модуль главного момента достигает своего минимального значения для точек, в которых главный момент* $\mathbf{M}$ *будет параллелен главному вектору* $\mathbf{R}$ (в этих точках $\varphi_O = 0$ или π и $|\cos\varphi_O|$ имеет максимальное значение, равное единице). Величина минимального момента определяется формулой (14.15) или, что то же самое, (14.16). Заметим, что минимальный момент обращается в нуль, если второй инвариант равен нулю.

Перейдем к определению геометрического места точек, в которых главный момент $\mathbf{M}$ параллелен главному вектору $\mathbf{R}$. Пусть точка $N(\mathbf{r})$ принадлежит искомому геометрическому месту. Главный момент относительно точки N согласно (14.10) будет равен

$$\mathbf{M}_N = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{NO} \times \mathbf{R}$$

или

$$\mathbf{M}_N = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R},$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{NO}$ и $\mathbf{M}_O$ — главный момент системы относительно начала координат.

Векторы $\mathbf{M}_N$ и $\mathbf{R}$ по предположению параллельны, следовательно, они отличаются только размерным скалярным множителем μ:

$$\mathbf{M}_N = \mu \mathbf{R}.$$

Учитывая последнее равенство, можно написать:

$$\mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mu \mathbf{R}, \tag{14.17}$$

где μ — параметр.

Этому уравнению удовлетворяют радиусы-векторы точек, для которых главный момент $\mathbf{M}_N$ параллелен главному вектору $\mathbf{R}$. Легко видеть, что последнее уравнение определяет в пространстве прямую линию, которая называется *центральной осью данной системы векторов*. В координатной форме уравнение (14.7) можно записать в следующем виде:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \\ = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}, \tag{14.18}$$

где x, y, z — координаты центральной оси.

Уравнение центральной оси (14.17) можно преобразовать к параметрической форме (11.1). Для этого умножим векторно обе части уравнения (14.17) на вектор $\mathbf{R}$ справа:

$$\mathbf{M}_O \times \mathbf{R} - (\mathbf{r} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R} = 0.$$

Раскроем двойное векторное произведение [см. (10.13′)]

$$\mathbf{M}_O \times \mathbf{R} - [\mathbf{R}(\mathbf{r}\mathbf{R}) - \mathbf{r}R^2] = 0,$$

Отсюда

$$\mathbf{r} = \frac{1}{R^2}\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O + \frac{\mathbf{rR}}{R^2}\mathbf{R}.$$

При переменном $\mathbf{r}$ выражение $\mathbf{rR}/R^2$ будет переменным. Обозначим его через λ, где λ — параметр. Тогда уравнение центральной оси примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \lambda\mathbf{R}, \tag{14.19}$$

где

$$\mathbf{r}_O = \frac{1}{R^2}\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O. \tag{14.20}$$

Естественно, что уравнение (14.19) эквивалентно двум уравнениям в координатной форме

$$\frac{x - x_O}{R_x} = \frac{y - y_O}{R_y} = \frac{z - z_O}{R_z}, \tag{14.19'}$$

причем x_O, y_O и z_O определены равенствами:

$$x_O = \frac{R_y M_z - R_z M_y}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad y_O = \frac{R_z M_x - R_x M_z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$z_O = \frac{R_x M_y - R_y M_x}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

В соответствии с определением все точки центральной оси данной системы векторов обладают следующими свойствами:

1) главный момент относительно точек центральной оси одинаков для всех точек оси;

2) главный момент, вычисленный относительно точки центральной оси, параллелен главному вектору;

3) модуль главного момента данной системы векторов, вычисленного относительно точки центральной оси, меньше модуля главного момента той же системы векторов, вычисленного относительно любой другой точки пространства.

В заключение заметим, что о центральной оси можно говорить только в том случае, когда первый инвариант не равен нулю.

9. Распределение главных моментов в пространстве. Центральная ось системы векторов дает возможность представить простую геометрическую картину распределения главных моментов в пространстве.

Построим поверхность круглого цилиндра, ось которого совпадает с центральной осью системы. Возьмем на этой поверхности произвольную точку O_1 и опустим из нее на центральную ось перпендикуляр; основание перпендикуляра обозначим через O, а радиус цилиндра — через h (рис. 60). Главный момент системы относительно точки O обозначим через $\mathbf{M}_1$ (минимальный момент, одинаковый для всех точек центральной оси) и построим в этой точке главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{M}_1$. Главный момент относительно точки O_1 на основании (14.11) будет складываться из $\mathbf{M}_1$ и момента главного вектора относительно точки O_1. Обозначим его $\mathbf{M}_2$. Последний согласно свойствам момента вектора (см. § 13, п. 2 и (13.3)) равен Rh:

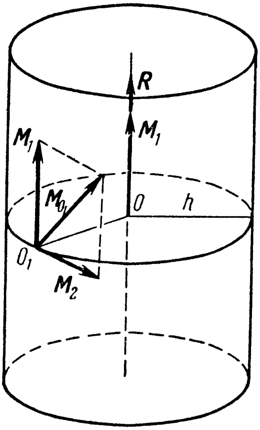

Рис. 60.

$$M_2 = Rh, \tag{14.21}$$

причем $\mathbf{M}_2 \perp OO_1$ и $\mathbf{M}_1$ (направление его показано на рис. 60). Величина момента $\mathbf{M}_{O_1}$ будет равна

$$M_{O_1} = \sqrt{M_1^2 + R^2 h^2}.$$

Из этого выражения видно, что *для всех точек, лежащих на поверхности круглого цилиндра, ось которого совпадает с центральной осью системы, модули главных моментов равны между собой*, или, иначе говоря, *геометрическое место точек, для которых главные моменты системы векторов имеют равные модули, есть поверхность круглого цилиндра, ось которого совпадает с центральной осью системы.*

10. Понятие о винте *). В этом пункте мы кратко остановимся на понятии винта (дополнительно о нем см.

---

*) За последние десятилетия широкое применение получило винтовое исчисление, изложение которого выходит за рамки данного руководства — см., например, А. П. Котельников, Винтовое исчисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань, 1895, или Ф. М. Диментберг, Определение положений пространственных механизмов, Изд. АН СССР, 1950.

п. 3 § 19). Прежде всего напомним, что вектор и момент вектора, главный вектор и главный момент системы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ — это векторы разной природы, разной размерности. Рассмотрим скользящий вектор $\mathbf{R}$, лежащий на некоторой прямой α, и некоторый вектор $\mathbf{M}$, *коллинеарный* ему и имеющий размерность момента вектора $\mathbf{R}$. Совокупность двух таких векторов называется *винтом*. В зависимости от природы вектора $\mathbf{R}$ можно говорить о динамическом винте, кинематическом винте, электродинамическом винте и т. п. Вектор $\mathbf{R}$ называется *амплитудой* винта, прямая α — *основанием* или *осью* винта, вектор $\mathbf{M}$ — *моментом*. Так как векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ коллинеарны, то между ними должна существовать линейная зависимость

$$\mathbf{M} = p\mathbf{R}, \tag{14.22}$$

причем число p, имеющее всегда размерность длины, называется *параметром* винта (параметр винта p будет положительным числом, если векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ направлены в одну сторону, и отрицательным, если эти векторы направлены в разные стороны).

Остановимся прежде всего на вопросе о числе независимых параметров, определяющих винт, и на способе задания винта. Амплитуда винта по определению является скользящим вектором. Как было показано (см. п. 5 § 13), скользящий вектор, включая линию его действия, определяется пятью независимыми скалярными величинами. Следовательно, для задания амплитуды винта $\mathbf{R}$ и его оси требуется пять независимых скалярных параметров. Момент винта $\mathbf{M}$ можно определить, пользуясь равенством (14.22), которое в дополнение к известному вектору $\mathbf{R}$ требует знания еще одного числа — параметра винта p. Таким образом, винт вполне определяется ш е с т ь ю н е з а в и с и м ы м и скалярами. Какие величины удобнее всего выбрать для задания винта? Существует несколько способов задания винта. Остановимся на некоторых из них.

1. Винт может быть определен модулем амплитуды R, параметром винта p и теми четырьмя величинами, которые определяют положение оси винта (прямая в пространстве определяется четырьмя независимыми параметрами). Недостаток этого способа состоит в том, что направление амплитуды на оси винта остается неопределенным.

2. Амплитуда винта **R** как скользящий вектор может быть определена шестью числами: R_x, R_y, R_z, m_x^*, m_y^*, m_z^*, где первые три числа равны проекциям амплитуды, а вторые три числа равны моментам амплитуды относительно тех же осей координат (см. п. 5 § 13). Между этими числами имеется одна зависимость (условие перпендикулярности):

$$R_x m_x^* + R_y m_y^* + R_z m_z^* = 0,$$

так что независимых величин здесь только пять.

Шестым числом, определяющим винт, будет параметр винта p. Если винт обозначить символом $\hat{S}$, то можно записать:

$$\hat{S}\left(R_x,\ R_y,\ R_z,\ m_x^*,\ m_y^*,\ m_z^*,\ p\right)$$

или сокращенно:

$$\hat{S}\left(\mathbf{R},\ \mathbf{m}_O^*,\ p\right),$$

где $\mathbf{m}_O^*$ — момент амплитуды **R** относительно начала координат в предположении, что амплитуда находится на оси винта (векторы **R** и $\mathbf{m}_O^*$ подчинены условию ортогональности). Необходимо иметь в виду, что при этом способе задания винта вектор $\mathbf{m}_O^*$ определяет не момент винта, а момент амплитуды относительно начала координат. Момент винта **M** вычисляется по формуле (14.22), и его проекции равны:

$$M_x = pR_x, \quad M_y = pR_y, \quad M_z = pR_z. \tag{14.22'}$$

3. Очень часто винт задают следующими величинами: R_x, R_y, R_z, x_O, y_O, z_O, p, где x_O, y_O, z_O — координаты любой точки оси винта (одну из них можно выбрать произвольно):

$$\hat{S}(R_x,\ R_y,\ R_z,\ x_O,\ y_O,\ z_O,\ p) \tag{14.23}$$

или сокращенно:

$$\hat{S}(\mathbf{R},\ \mathbf{r}_O,\ p). \tag{14.23'}$$

11. Винт системы векторов. Очевидно, что совокупность главного вектора и минимального момента системы векторов образует винт, который называется *винтом данной системы векторов*, причем *за основание или ось винта системы принимают центральную ось системы*. Легко видеть, что параметр винта системы равен:

$$p = \frac{I_2}{I_1}, \tag{14.24}$$

причем знак параметра винта определяется знаком второго инварианта I_2 ($I_1 > 0$). Действительно, умножим обе части равенства (14.22) скалярно на $\mathbf{R}$. Тогда

$$p = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{R^2},$$

что на основании определения инвариантов системы дает формулу (14.24).

Для вычисления винта системы векторов требуется:

1. Вычислить главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент системы векторов $\mathbf{M}_O$ (O — начало координат).

2. Найти первый и второй инварианты системы I_1 и I_2 (см. (14.12) и (14.13′)).

3. Определить параметр винта из равенства (14.24).

4. Найти точку $\mathbf{r}_O$ на центральной оси по формуле (14.20).

Тогда винт системы будет определен своими координатами R_x, R_y, R_z, x_O, y_O, z_O, p. Обычно, кроме координат винта, вычисляют еще модуль амплитуды $R = \sqrt{I_1}$, модуль момента (минимальный момент) $M = |p| \cdot R$ и уравнение оси винта по формуле (14.19) или (14.19′). Если система связана с некоторым объектом, то ось винта, как правило, ориентируют относительно этого объекта. Прежде чем рассмотреть пример, исследуем возможные частные случаи.

Случай 1. $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$. В этом случае параметр винта p и момент $\mathbf{M}$ равны нулю и винт вырождается в одну амплитуду $\mathbf{R}$:

$$S(\mathbf{R},\ \mathbf{r}_O,\ 0),$$

где $\mathbf{r}_O$ определяется равенством (14.20). Ось вырожденного винта определяется обычным способом.

Случай 2. $I_1 = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$. В этом случае главный момент системы одинаков для всех точек пространства, винт системы вырождается в один момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}_O$, параметр винта равен бесконечности, за ось винта можно принять любую прямую, параллельную главному моменту.

Случай 3. $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$. В этом случае винт системы равен нулю.

Случай 4. $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$ — общий случай. Винт состоит из двух векторов **R** и **M**, параметр винта равен конечному числу, отличному от нуля, и ось винта определяется обычным путем.

Рассмотрим пример, который проиллюстрирует изложенный здесь материал.

Пример. По ребрам куба со стороной a действуют двенадцать равных по величине скользящих векторов, как показано на рис. 61, a. Определить винт этой системы.

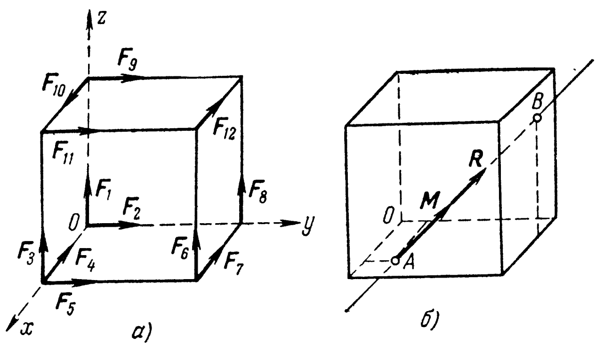

Рис. 61.

Найдем прежде всего проекции главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O$ относительно начала координат (см. (14.2′) и (14.6′)). При вычислении проекции главного момента нужно учитывать (13.14), а также условия, при которых момент вектора относительно оси равен нулю — см. стр. 108.

$$R_x = 0+0+0-F+0+0-F+0+0+F+0-F = -2F,$$

$$R_y = 0+F+0+0+F+0+0+0+F+0+F+0 = 4F,$$

$$R_z = F+0+F+0+0+F+0+F+0+0+0+0 = 4F,$$

$$M_{Ox} = 0+0+0+0+0+Fa+0+Fa-Fa+ +0-Fa+0 = 0,$$

$$M_{Oy} = 0+0-Fa+0+0-Fa+0+0+0+ +Fa+0-Fa = -2Fa,$$

$$M_{Oz} = 0+0+0+0+Fa+0+Fa+0+ +0+0+Fa+Fa = 4Fa.$$

Поясним вычисления проекций главного момента. Так, например, вектор $\mathbf{F}_1$ пересекает оси x и y и параллелен оси z (в частном случае — совпадает), поэтому его моменты относительно всех трех осей равны нулю (первые слагаемые в выражениях для M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}). Вектор $\mathbf{F}_8$ пересекает ось y и параллелен оси z, поэтому восьмые слагаемые в выражении для M_{Oy} и M_{Oz} равны нулю; момент относительно оси x вычисляем по формуле (13.14) — он равен Fa (восьмое слагаемое в M_{Ox}).

Таким образом, главный вектор $\mathbf{R}$ системы векторов и главный момент относительно начала координат определены своими проекциями

$$\mathbf{R}(-2F,\ 4F,\ 4F),$$

$$\mathbf{M}_O(0,\ -2Fa,\ 4Fa).$$

Найдем инварианты системы и параметр винта (см. (14.12), (14.13′) и (14.24)):

$$I_1 = 36F^2, \quad I_2 = 8F^2a, \quad p = \frac{2}{9}a.$$

Так как параметр винта положителен, то амплитуда винта (главный вектор) и его момент (минимальный момент) направлены в одну сторону.

Найдем точку $\mathbf{r}_O$ на оси винта (см. (14.20)). Имеем

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O(24F^2a,\ 8F^2a,\ 4F^2a),$$

следовательно,

$$\mathbf{r}_O\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{9}a,\ \frac{1}{9}a\right)$$

(можно выбрать и другую точку на оси винта).

Итак, винт системы будет

$$\hat{S}\left(-2F,\ 4F,\ 4F,\ \frac{2a}{3},\ \frac{2a}{9},\ \frac{a}{9},\ \frac{2a}{9}\right).$$

Перейдем к более наглядной характеристике винта. Винт системы состоит из двух коллинеарных и направленных в одну сторону векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$, модули которых соответственно равны:

$$R = 6F, \quad M = \frac{4}{3}Fa.$$

Эти векторы действуют по центральной оси системы, уравнение которой в векторно-параметрической форме имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \lambda \mathbf{R}, \tag{14.25}$$

где

$$\mathbf{r}_O = \frac{2a}{3}\mathbf{i} + \frac{2a}{9}\mathbf{j} + \frac{a}{9}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{R} = -2F\mathbf{i} + 4F\mathbf{j} + 4F\mathbf{k}$$

и λ — произвольный параметр.

Легко определить точки пересечения этой оси с гранями куба. Уравнение нижней грани будет (см. (8.15)):

$$\mathbf{rk} = 0. \tag{14.26}$$

Точка пересечения прямой (14.25) и нижней грани куба найдется в результате совместного решения уравнений (14.25) и (14.26). Внесем $\mathbf{r}$ из (14.25) в уравнение нижней грани $\mathbf{rk} = 0$ и найдем соответствующее значение для λ. Имеем

$$\mathbf{r}_O\mathbf{k} + \lambda \mathbf{Rk} = 0,$$

следовательно,

$$\lambda = -\frac{\mathbf{r}_O\mathbf{k}}{\mathbf{Rk}}.$$

Но $\mathbf{r}_O\mathbf{k} = \frac{a}{9}$ и $\mathbf{Rk} = 4F$, поэтому

$$\lambda = -\frac{a}{36F}.$$

Внесем это значение λ в (14.25) и получим радиус-вектор точки пересечения оси винта и нижней грани:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O - \frac{a}{36F}\mathbf{R}.$$

Пользуясь значениями $\mathbf{r}_O$ и $\mathbf{R}$, найдем $\mathbf{r}_A$:

$$\mathbf{r}_A = \frac{13}{18}a\mathbf{i} + \frac{a}{9}\mathbf{j},$$

т. е. ось винта пересекает нижнюю грань в точке $A\left(\frac{13a}{18}, \frac{a}{9}, 0\right)$.

Уравнение правой боковой грани будет

$$\mathbf{rj} = a.$$

Решая это уравнение совместно с (14.25), найдем точку пересечения центральной оси с правой боковой гранью: $B\left(\frac{5a}{18},\ a,\ \frac{8a}{9}\right)$ (читатель без труда выполнит все необходимые выкладки). На рис. 61, *б* показана ось винта системы и на ней его компоненты $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$.

Уравнения центральной оси можно записать и в координатной форме (14.19′) (они сокращены на общий множитель $2F$):

$$\frac{x-\frac{2a}{3}}{-1}=\frac{y-\frac{2a}{9}}{2}=\frac{z-\frac{a}{9}}{2}.$$

Точка A найдется теперь, если положить $z=0$, а точка B, если положить $y=a$.

§ 15. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

1. Постановка задачи. Пусть на некоторый объект действует совокупность векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (они могут быть свободными, скользящими или связанными). Например, на тело действуют n сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, или в пространстве имеется n прямолинейных проводников, в каждом из которых течет ток силы $\mathbf{i}_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$). Вопрос состоит в следующем: нельзя ли заменить данную систему n векторов другой, предпочтительно более простой системой, которая вызывала бы такое же состояние объекта, как и данные векторы *)? На первый взгляд эта задача имеет не столько математическое, сколько физическое решение: нужно каждый раз, исходя из природы рассматриваемого явления, исследовать вопрос и найти на него соответствующий ответ. Однако этот взгляд не совсем верен. Оказывается, что в ряде случаев задача замены одной системы векторов другой системой, ей эквивалентной, имеет совершенно одинаковое математическое решение в самых различных физических вопросах. Кроме того, помимо приложений, эта задача имеет и чисто матема-

*) Как правило, авторы, стремясь к лаконичному изложению, определяют эквивалентность двух систем скользящих векторов равенством их главных векторов и главных моментов. Такое определение позволяет сразу же перейти к изложению основных свойств эквивалентных систем, но при этом в значительной степени утрачивается физическая сторона вопроса и, по существу, математическое следствие (равенство главных векторов и моментов) рассматривается как исходное определение. В настоящем руководстве в основе определения эквивалентности лежат простые, достаточно общие физические соображения.

тический интерес, особенно в связи с развитием винтового исчисления.

2. Основные определения и аксиомы. Две системы векторов будем считать эквивалентными, если они вызывают одинаковое состояние некоторого объекта или одинаково характеризуют данное явление. В данном определении эквивалентности имеются некоторые термины («одинаковое состояние», «одинаково характеризуют»), которые не являются математически точными. Поэтому введем некоторые дополнительные определения и аксиомы, которые позволят подойти к понятию эквивалентности математически.

Эквивалентность будем обозначать знаком $\backsim$; запись

$$\{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n\} \backsim \{\mathbf{b}_1; \ldots; \mathbf{b}_k\}$$

означает, что система векторов $\{\mathbf{a}_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ эквивалентна системе $\{\mathbf{b}_j\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ и, наоборот, система векторов $\{\mathbf{b}_j\}$ эквивалентна системе $\{\mathbf{a}_i\}$.

Из определения свободных и скользящих векторов следует, что если векторы *свободны*, то

$$\mathbf{a}_A \backsim \mathbf{a}_B, \tag{15.1}$$

где A и B — любые точки пространства. Если же векторы *скользящие*, то

$$\mathbf{a}_{\alpha A} \backsim \mathbf{a}_{\alpha B} \backsim \mathbf{a}_\alpha, \tag{15.2}$$

где A и B — любые точки на α (см. (13.1)).

Если система векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *эквивалентна одному* вектору $\mathbf{R}$:

$$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \backsim \mathbf{R}, \tag{15.3}$$

то говорят, что данная система векторов имеет *равнодействующий вектор* или *приводится* *) к равнодействующему вектору. Заметим сразу же, что далеко не всегда систему векторов можно привести к одному равнодействующему вектору.

Если система векторов $\{\mathbf{a}_i\}$ эквивалентна нулевой системе, то будем говорить, что *данная система векторов эквивалентна нулю или уравновешена*:

$$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \backsim 0.$$

---

*) Слово «приводится» означает здесь, что одним вектором можно заменить действие всей данной системы векторов.

Вопрос о признаках, определяющих нулевую систему, сейчас не ставится, однако из данных определений вытекает, что один вектор $\mathbf{a}$ будет эквивалентен нулю в том и только том случае, если он равен нулю. Иначе говоря, из $\mathbf{a} \backsim 0$ следует, что $\mathbf{a} = 0$, и наоборот.

Первая аксиома. Если к данной системе векторов присоединить или от данной системы отбросить систему, эквивалентную нулю, то в результате получится новая система, эквивалентная данной. То есть, если

$$\{\mathbf{b}_1; \ldots; \mathbf{b}_k\} \backsim 0, \tag{15.4}$$

то будет справедливо следующее соотношение:

$$\{\mathbf{a}_1; \ldots; \mathbf{a}_n; \quad \mathbf{b}_1; \ldots; \mathbf{b}_k\} \backsim \{\mathbf{a}_1; \ldots, \mathbf{a}_n\}. \tag{15.5}$$

Таким образом, первая аксиома устанавливает, что из (15.4) следует (15.5) и, наоборот, из (15.5) следует (15.4).

Все сделанные до сих пор определения и первая аксиома относятся к любой совокупности векторов, содержащей векторы разной природы. Понятно, что такие общие определения требуют более детального подхода в конкретных случаях. Прежде всего условимся, что дальнейшие определения и аксиомы будут относиться к векторам одной размерности (случаи разной размерности векторов будут специально оговариваться). Таким образом, если нет специальной оговорки, то векторы, входящие в систему, можно подвергать формальным математическим операциям сложения и вычитания.

Вторая аксиома. Два вектора, имеющие *общее начало*, эквивалентны одному вектору, *приложенному к той же точке* и равному их сумме:

$$\{\mathbf{a}_{1A}; \mathbf{a}_{2A}\} \backsim \mathbf{R}_A,$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2.$$

Эта аксиома является по существу перефразировкой хорошо известных правил сложения двух сил, приложенных к одной точке, сложения скоростей и т. п.

Следствие 1. Система векторов, приложенных к одной точке, эквивалентна одному равнодействующему вектору, имеющему то же начало и равному сумме данных векторов.

Действительно, применим последовательно вторую аксиому сначала к первой паре векторов, затем присоединим третий вектор и т. д. Таким образом,

$$\{\mathbf{a}_{1A};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{nA}\} \infty \mathbf{R}_A, \tag{15.6}$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n. \tag{15.7}$$

Следствие 2. Для того чтобы система векторов, приложенных к одной точке, была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы их сумма равнялась нулю.

Для доказательства достаточно заменить данную систему векторов $\{\mathbf{a}_{1A};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{nA}\}$ одним вектором $\mathbf{R}_A$ и учесть, что один вектор эквивалентен нулю тогда и только тогда, когда он равен нулю. Следовательно, условие

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = 0 \tag{15.8}$$

является необходимым и достаточным, чтобы система векторов, имеющих общее начало, была уравновешена.

Следствие 3. Система, составленная из суммы двух взаимно противоположных систем (см. (14.1)), эквивалентна нулю:

$$\{\mathbf{a}_{1A_1};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{nA_n}\} + \{-\mathbf{a}_{1A_1};\ \ldots;\ -\mathbf{a}_{nA_n}\} \infty 0 \tag{15.9}$$

(так как любые два вектора $\mathbf{a}_{iA_i}$ и $-\mathbf{a}_{iA_i}$ взаимно уравновешены).

Следствие 4. Если справедливо

$$\{-\mathbf{a}_{1A_1};\ \ldots;\ -\mathbf{a}_{nA_n}\} + \{\mathbf{b}_{1B_1};\ \ldots;\ \mathbf{b}_{kB_k}\} \infty 0, \tag{15.10}$$

то будет выполняться и следующее соотношение:

$$\{\mathbf{b}_{1B_1};\ \ldots;\ \mathbf{b}_{kB_k}\} \infty \{\mathbf{a}_{1A_1};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{nA_n}\}, \tag{15.11}$$

и наоборот.

Действительно, присоединим к системе $\{\mathbf{a}_{iA_i}\}$ систему (15.10), эквивалентную нулю (первая аксиома):

$$\{\mathbf{a}_{iA_i}\} + \{-\mathbf{a}_{iA_i}\} + \{\mathbf{b}_{jB_j}\} \infty \{\mathbf{a}_{iA_i}\}.$$

Учитывая (15.9) и применяя снова первую аксиому, получим (15.11).

Первые две аксиомы и очевидные следствия имеют общий характер. Они справедливы как для системы свободных векторов, так и для систем скользящих и несвободных векторов. Следующая аксиома относится только к скользящим векторам.

Третья аксиома (аксиома системы скользящих векторов). Совокупность двух скользящих векторов эквивалентна нулю тогда и только тогда, когда они равны по величине, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

На рис. 62 показаны две пары скользящих векторов, каждая из которых эквивалентна нулю. Заметим сразу же,

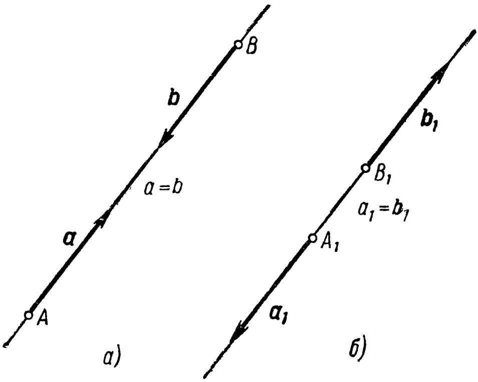

Рис. 62.

что если бы векторы, изображенные на рис. 62, были несвободными, то они не были бы эквивалентны нулю.

Следствие. Сумма двух взаимно противоположных систем скользящих векторов эквивалентна нулю:

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} + \{-\mathbf{a}_{1A_1}; \ldots; -\mathbf{a}_{nA_n}\} \backsim 0. \quad (15.12)$$

Полезно сравнить это соотношение с (15.9). В последнем взаимно уравновешенные векторы $\mathbf{a}_{iA_i}$ и $-\mathbf{a}_{iA_i}$ приложены к одной точке, и поэтому (15.9) справедливо не только для скользящих, но и для несвободных, связанных векторов. В (15.12) уравновешенные векторы $\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ и $-\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ лежат на одной прямой и, как правило, приложены к разным точкам. Поэтому (15.12) справедливо только для скользящих векторов и не справедливо для несвободных, связанных векторов.

Примечание 1. Пользуясь определением скользящих векторов и формулами (15.8) и (15.9), легко показать, что если два скользящих вектора лежат на одной прямой, равны по величине и обратны по направлению, то они эквивалентны нулю (сумма этих векторов равна нулю, а так как они скользящие и действуют по одной прямой, то их можно привести к одному началу). Однако обратное утверждение не может быть доказано, и поэтому введена третья аксиома.

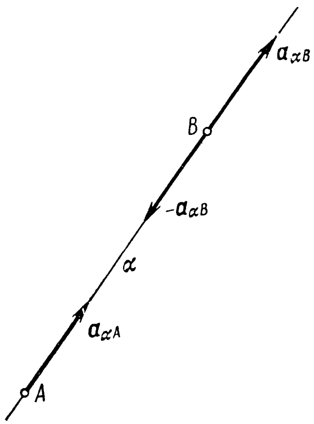

Рис. 63.

Примечание 2. Третья аксиома может служить признаком скользящих векторов в том смысле, что если для системы векторов справедлива третья аксиома, то векторы, входящие в систему, скользящие. Действительно, пусть для данной системы векторов справедлива третья аксиома и $\mathbf{a}_{\alpha A}$ — любой вектор этой системы. Возьмем на α произвольную точку B и добавим к данному вектору два уравновешенных вектора $\mathbf{a}_{\alpha B}$ и $-\mathbf{a}_{\alpha B}$ (это можно сделать на основании первой аксиомы и (15.9)). В результате получим (рис. 63)

$$\mathbf{a}_{\alpha A} \backsim \{\mathbf{a}_{\alpha A};\ \mathbf{a}_{\alpha B};\ -\mathbf{a}_{\alpha B}\}.$$

Учтем теперь, что по условию третья аксиома применима и, следовательно, два вектора $\mathbf{a}_{\alpha A}$ и $-\mathbf{a}_{\alpha B}$ эквивалентны нулю. Тогда, снова применяя первую аксиому и отбрасывая эти векторы, будем иметь

$$\{\mathbf{a}_{\alpha A};\ \mathbf{a}_{\alpha B};\ -\mathbf{a}_{\alpha B}\} \backsim \mathbf{a}_{\alpha B}$$

или

$$\mathbf{a}_{\alpha A} \backsim \mathbf{a}_{\alpha B},$$

и так как B — произвольная точка на α, то вектор $\mathbf{a}_{\alpha A}$ — скользящий.

§ 16. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СВОБОДНЫХ ВЕКТОРОВ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Теорема. *Система свободных векторов эквивалентна равнодействующему вектору, равному главному вектору системы.*

Доказательство. Пусть свободные векторы $\mathbf{a}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_n$ приложены в точках $A_1, \ldots, A_n$ соответственно. Тогда, пользуясь (15.1) и (15.6), последовательно получим

$$\{\mathbf{a}_{1A_1}; \ \ldots; \ \mathbf{a}_{nA_n}\} \infty \{\mathbf{a}_{1A}; \ \ldots; \ \mathbf{a}_{nA}\} \infty \mathbf{R}_A,$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n$$

и A — любая точка пространства.

Следствие. Для того чтобы система свободных векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы сумма векторов, составляющих данную систему, равнялась нулю.

Эта теорема и следствие по существу полностью решают вопрос о приведении системы свободных векторов к простейшему виду, а именно: *либо систему свободных векторов можно заменить одним вектором, либо она уравновешена* (*эквивалентна нулю*).

Пример. В механике доказывается, что при поступательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковую скорость, т. е. скорость в поступательном движении есть свободный вектор.

Пусть твердое тело участвует одновременно в n поступательных движениях и $\mathbf{v}_i$ — скорость поступательного движения с номером i. Тогда на основании доказанной теоремы можно утверждать, что результирующее движение тела есть поступательное движение, скорость которого равна сумме (векторной) скоростей составляющих движений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n. \tag{16.1}$$

§ 17. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

1. Элементарные операции и их свойства. Для системы скользящих векторов следующие операции называются *элементарными*:

1) перенос вектора вдоль линии его действия;

2) добавление или отбрасывание двух векторов $\mathbf{a}_{\alpha A}$ и $-\mathbf{a}_{\alpha A}$, равных по модулю, действующих по одной прямой и направленных в противоположные стороны;

3) замена нескольких векторов системы, приложенных к одной точке, одним вектором, равным их сумме и приложенным в той же точке;

4) замена одного вектора его составляющими, приложенными в той же точке.

Легко видеть, что элементарные операции обладают следующими свойствами.

Свойство 1. В результате применения элементарных операций получится новая система, эквивалентная данной.

Свойство 2. Элементарные операции не изменяют главного вектора и главного момента системы.

Свойство 1 непосредственно следует из определения скользящих векторов и аксиом. Свойство 2 тоже очевидно. Действительно, первая операция не изменяет момента вектора (см. (13.5)), и следовательно, она не изменяет и главного момента системы (главный вектор вообще не зависит от точек приложения векторов). Вторая операция не изменяет главного вектора и главного момента, так как она равносильна прибавлению или отбрасыванию системы, главный вектор и главный момент которой равны нулю (см. (14.3), (14.7) и п. 4 § 14, стр. 114). Третья и четвертая операции не изменяют главного вектора на основании его определения как суммы всех векторов, составляющих систему, и сочетательного свойства суммы. Главный момент не изменяется от третьей и четвертой операций в силу теоремы Вариньона — см. стр. 115.

Переход с помощью элементарных операций от одной системы скользящих векторов к другой системе будем обозначать символом $\rightarrow$, причем стрелка направляется от преобразуемой системы к преобразованной. Так, например, запись

$$\mathbf{a}_{\alpha A} \rightarrow \mathbf{a}_{\alpha B}$$

означает переход от вектора $\mathbf{a}_{\alpha A}$ к вектору $\mathbf{a}_{\alpha B}$, действующему по той же прямой α, но приложенному в точке B (первая элементарная операция). Запись

$$\{\mathbf{a}_A;\quad \mathbf{b}_\alpha;\quad -\mathbf{b}_\alpha\} \rightarrow \{\mathbf{a}_A\}$$

означает переход от системы $\{\mathbf{a}_A;\ \mathbf{b}_\alpha;\ -\mathbf{b}_\alpha\}$ к системе $\{\mathbf{a}_A\}$, при этом отброшены два равнопротивоположных вектора $\mathbf{b}_\alpha$ и $-\mathbf{b}_\alpha$, действующих по одной прямой (вторая элементарная операция).

В общем случае запись

$$\{\mathbf{a}_1;\ \ldots;\ \mathbf{a}_n\} \to \{\mathbf{b}_1;\ \ldots;\ \mathbf{b}_k\}$$

означает, что система $\{\mathbf{b}_j\}$ получена из системы $\{\mathbf{a}_i\}$ с помощью элементарных операций.

Очевидно, что элементарные операции обратимы, т. е. если система $\{\mathbf{b}_j\}$ получена из $\{\mathbf{a}_i\}$, то применением элементарных операций можно снова перейти от системы $\{\mathbf{b}_j\}$ к системе $\{\mathbf{a}_i\}$.

Если в результате применения элементарных операций получится нулевая система, то это обозначается

$$\{\mathbf{a}_1;\ \ldots;\ \mathbf{a}_n\} \to 0.$$

2. Приведение произвольной системы скользящих векторов к системе двух векторов (геометрическое решение). Лемма. *С помощью элементарных операций любую систему скользящих векторов всегда можно привести к двум векторам* (среди них могут быть и нулевые).

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_{\alpha A}$, $\mathbf{b}_{\beta B}$ и $\mathbf{c}_{\gamma C}$ — любые три скользящих вектора данной системы.

Рассмотрим сначала частный случай, когда хотя бы две линии действия векторов имеют по крайней мере одну общую точку (например, две линии пересекаются или сливаются). Пользуясь первой элементарной операцией, приведем соответствующие два вектора к общей точке их линий действия, а затем заменим эти векторы одним вектором, равным их сумме (третья элементарная операция). В результате три вектора будут приведены к двум векторам.

Рассмотрим теперь общий случай, когда линии действия векторов не имеют общих точек. Проведем через точку C (точка приложения третьего вектора $\mathbf{c}_{\gamma C}$) две плоскости — плоскость π_1, содержащую вектор $\mathbf{a}_{\alpha A}$, и плоскость π_2, содержащую $\mathbf{b}_{\beta B}$; будем считать вначале, что эти плоскости не совпадают. Так как плоскости π_1 и π_2 содержат общую точку C и не совпадают, то они пересекаются по некоторой прямой δ. Не нарушая общности, можно считать, что точки приложения векторов $\mathbf{a}_{\alpha A}$ и $\mathbf{b}_{\beta B}$ не лежат на δ (если A и B принадлежат δ, то, пользуясь первой элементарной операцией, переместим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вдоль линий их действия). Выберем на δ произвольную точку D, отличную от C, и соединим точки A и B с C и D (рис. 64); прямые AC и AD

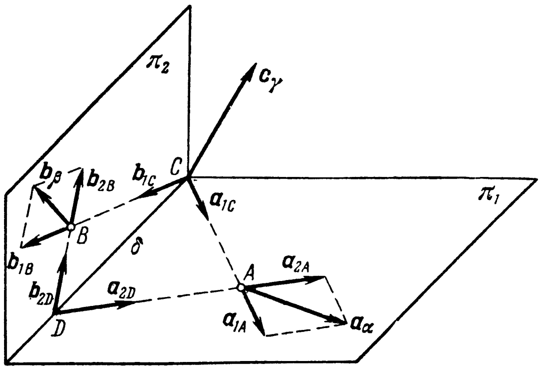

Рис. 64.

будут лежать в плоскости π_1, а прямые BC и BD — в плоскости π_2. Применим четвертую элементарную операцию и заменим вектор $\mathbf{a}_{\alpha A}$ его составляющими по CA и DA, а вектор $\mathbf{b}_{\beta B}$ — составляющими по CB и DB:

$$\mathbf{a}_{\alpha A} \to \{\mathbf{a}_{1A};\ \mathbf{a}_{2A}\},\quad \mathbf{b}_{\beta B} \to \{\mathbf{b}_{1B};\ \mathbf{b}_{2B}\},$$

где

$$\mathbf{a}_{\alpha A} = \mathbf{a}_{1A} + \mathbf{a}_{2A},\quad \mathbf{b}_{\beta B} = \mathbf{b}_{1B} + \mathbf{b}_{2B}.$$

Тогда будем иметь:

$$\{\mathbf{a}_{\alpha A};\ \mathbf{b}_{\beta B};\ \mathbf{c}_{\gamma C}\} \to \{\mathbf{a}_{1A};\ \mathbf{a}_{2A};\ \mathbf{b}_{1B};\ \mathbf{b}_{2B};\ \mathbf{c}_{\gamma C}\}.$$

Применим теперь первую элементарную операцию и перенесем векторы $\mathbf{a}_{1A}$ и $\mathbf{b}_{1B}$ по их линиям действия в точку C, а векторы $\mathbf{a}_{2A}$ и $\mathbf{b}_{2B}$ — в точку D:

$$\{\mathbf{a}_{1A};\ \mathbf{a}_{2A};\ \mathbf{b}_{1B};\ \mathbf{b}_{2B};\ \mathbf{c}_{\gamma C}\} \to \{\mathbf{a}_{1C};\ \mathbf{b}_{1C};\ \mathbf{c}_{\gamma C};\ \mathbf{a}_{2D};\ \mathbf{b}_{2D}\}.$$

В точке C сходятся три вектора: $\mathbf{a}_{1C}$, $\mathbf{b}_{1C}$ и $\mathbf{c}_{\gamma C}$. Пользуясь третьей элементарной операцией, заменим эти векторы одним вектором $\mathbf{R}_{1C}$:

$$\{\mathbf{a}_{1C};\ \mathbf{b}_{1C};\ \mathbf{c}_{\gamma C}\} \to \mathbf{R}_{1C},$$

где

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}.$$

Аналогично, заменим векторы $\mathbf{a}_{2D}$ и $\mathbf{b}_{2D}$ одним вектором $\mathbf{R}_{2D}$:

$$\{\mathbf{a}_{2D};\ \mathbf{b}_{2D}\} \to \mathbf{R}_{2D}, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2.$$

Следовательно,

$$\{\mathbf{a}_{\alpha A};\ \mathbf{b}_{\beta B};\ \mathbf{c}_{\gamma C}\} \to \{\mathbf{R}_{1C};\ \mathbf{R}_{2D}\},$$

т. е. с помощью элементарных операций три скользящих вектора приведены к двум векторам.

Это же доказательство остается в силе для случая, когда плоскости π_1 и π_2 совпадают. Действительно, можно по-прежнему считать, что точки приложения векторов A, B и C не лежат на одной прямой, и тогда для доказательства леммы достаточно совместить точку D с точкой A. При этом вектор $\mathbf{a}_{\alpha A}$ разлагать не придется, а вектор $\mathbf{b}_{\beta B}$ нужно разложить по направлениям AB и CB, затем первую составляющую перенести в точку A, а вторую в C.

Таким образом, окончательно доказано, что с помощью элементарных операций любые **три** скользящих вектора можно привести к двум (естественно, что среди них могут быть и нулевые).

Если система состоит из n векторов ($n > 3$), то, выбрав сначала первые три вектора, приведем их к двум, уменьшив общее число векторов системы на единицу. Продолжая этот процесс, приведем данную систему n векторов к системе двух векторов, что доказывает лемму.

Примечание 1. На основании первого свойства элементарных операций можно утверждать, что полученные два вектора будут эквивалентны данной системе.

Примечание 2. Указанная последовательность применения элементарных операций не является, очевидно, единственной; кроме того, и в данной последовательности имеются неограниченные возможности изменять результирующие векторы (например, путем выбора точки D на δ). Поэтому с помощью элементарных операций можно построить бесчисленное множество систем двух векторов, эквивалентных данной системе.

Примечание 3. Если данная система эквивалентна нулю, то два вектора, к которым она приводится, тоже эквивалентны нулю. На основании третьей аксиомы эти векторы равны по величине, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны, и следовательно, их можно отбросить (вторая элементарная операция). Таким образом, любая эквивалентная нулю система скользящих векторов с помощью элементарных операций приводится к нулевой системе. Это коротко можно записать следующим образом: если

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} \backsim 0, \tag{17.1}$$

то

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} \to 0. \tag{17.2}$$

§ 18. УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ СИСТЕМ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

1. Условия уравновешенности системы скользящих векторов. Теорема. *Для того чтобы система скользящих векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы и ее главный момент относительно произвольной точки пространства равнялись нулю*:

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим систему n скользящих векторов $\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\}$. Пусть $\mathbf{R}$ и M_O (O — произвольная точка пространства) — главный вектор и главный момент данной системы. Требуется доказать, что из соотношения

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} \backsim 0 \tag{18.1}$$

следует

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0, \tag{18.2}$$

и обратно, если справедливы равенства (18.2), то будет справедливо и соотношение (18.1).

С помощью элементарных операций приведем данную систему к двум скользящим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. На основании первого свойства элементарных операций данная система и система $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ эквивалентны. Поэтому, если первая система эквивалентна нулю, то и вторая система эквивалентна нулю, и наоборот. Кроме того, на основании второго свойства элементарных операций (стр. 136) главный вектор и главный момент системы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ равны соответственно $\mathbf{R}$ и M_O. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что из равенств (18.2) вытекает

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \infty 0 \tag{18.3}$$

и, наоборот, из (18.3) следуют равенства (18.2).

В п. 4 § 14 (стр. 114) было показано, что равенства (18.2) являются необходимым и достаточным условием того, чтобы два вектора имели равные модули, лежали на одной прямой и были направлены в противоположные стороны. Доказательство теоремы непосредственно вытекает теперь из третьей аксиомы.

2. Условия эквивалентности двух систем скользящих векторов. Основная теорема. *Для того чтобы две системы скользящих векторов были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы были равны их главные векторы и главные моменты.* Иначе говоря, если $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{M}_{O1}$ и $\mathbf{M}_{O2}$ — главные векторы и главные моменты систем

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{n\alpha_n}\}, \tag{I}$$

$$\{\mathbf{b}_{1\beta_1};\ \ldots;\ \mathbf{b}_{k\beta_k}\} \tag{II}$$

соответственно, то из соотношения

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} \infty \{\mathbf{b}_{1\beta_1};\ \ldots;\ \mathbf{b}_{k\beta_k}\} \tag{18.4}$$

следуют равенства

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{M}_{O1} = \mathbf{M}_{O2} \tag{18.5}$$

и, наоборот, из равенств (18.5) следует соотношение (18.4) (O — произвольная точка пространства).

Доказательство. Составим систему, противоположную системе (I): $\{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\}$; ее главный вектор и главный момент будут равны $-\mathbf{R}_1$ и $-\mathbf{M}_{O1}$ (см. (14.9)). Рассмотрим систему

$$\{\mathbf{b}_{1\beta_1};\ \ldots;\ \mathbf{b}_{k\beta_k}\} + \{-\mathbf{a}_{1\alpha_1};\ \ldots;\ -\mathbf{a}_{n\alpha_n}\}. \tag{III}$$

Главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{M}_O$ системы (III) на основании (14.3) и (14.7) будут соответственно равны:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1,$$
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O2} - \mathbf{M}_{O1}.$$

Необходимость. Если системы (I) и (II) эквивалентны, то система (III) будет эквивалентна нулю (так как в этом случае $\{\mathbf{b}_{j\beta_j}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \backsim \{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \backsim 0$) и на основании предыдущей теоремы $\mathbf{R} = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$. Отсюда $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1$ и $\mathbf{M}_{O2} = \mathbf{M}_{O1}$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ и $\mathbf{M}_{O1} = \mathbf{M}_{O2}$; тогда $\mathbf{R} = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$. Из этого следует, что система (III) эквивалентна нулю и, следовательно, системы (I) и (II) эквивалентны — см. следствие 4 второй аксиомы, стр. 132.

3. Преобразование эквивалентных систем. Теорема. *Если две системы скользящих векторов эквивалентны, то с помощью элементарных операций можно перейти от одной системы к другой.*

Доказательство. Рассмотрим две эквивалентные системы скользящих векторов:

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \backsim \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\}. \tag{18.6}$$

Имеем

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \backsim 0; \quad \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \backsim 0$$

(первое соотношение очевидно — см. (15.9), а второе вытекает из первого и (18.6)).

На основании (17.1) и (17.2) будем иметь

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \to 0, \tag{18.7}$$

$$\{\mathbf{b}_{j\beta_j}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \to 0. \tag{18.8}$$

Рассмотрим систему

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\}.$$

Учитывая (18.8), получим

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\} \to \{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\}.$$

Так как элементарные операции обратимы, то

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \to \{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{-\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} + \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\} \to \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\}$$

(последнее на основании (18.7)). Таким образом:

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_i}\} \to \{\mathbf{b}_{j\beta_j}\},$$

что и требовалось доказать.

Эта теория дает основание считать, что выражения «заменить одну систему скользящих векторов другой системой, ей эквивалентной» и «привести с помощью элементарных операций данную систему к другой системе» равнозначны.

§ 19. ТЕОРИЯ ПАР

1. Пара векторов и ее момент. Исследование эквивалентности систем скользящих векторов и приведение их к простейшему виду базируется на основной теореме (см. стр. 141). Мы начнем изучение различных систем с весьма частной, но очень важной системы, так называемой пары векторов.

Совокупность двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных скользящих векторов называется *парой векторов*, иначе говоря, парой векторов является система

$$\{\mathbf{a}_\alpha;\ -\mathbf{a}_\beta\},\quad \text{где}\quad \alpha \| \beta.$$

Векторы, образующие пару, называются *векторами пары*; расстояние между линиями действия векторов пары называется *плечом пары*; плоскость, проходящая через линии действия векторов пары, называется *плоскостью пары*.

Главный вектор $\mathbf{R}$ пары векторов равен, очевидно, нулю, поэтому главный момент этой системы не зависит от выбора полюса и одинаков для всех точек пространства (см. (14.11) и следствие 2). На этом основании главный момент системы векторов, составляющих пару, называется *моментом пары*, т. е.

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_\alpha) + \mathbf{m}_O(-\mathbf{a}_\beta) \quad (\alpha \| \beta), \tag{19.1}$$

где $\mathbf{m}$ — момент пары и O — произвольная точка пространства (отдельные слагаемые правой части зависят от выбора полюса O, но их сумма от выбора полюса не зависит).

Момент пары векторов обладает следующими очевидными свойствами (в физике эти свойства часто служат определением пары):

1) модуль момента пары равен произведению модуля вектора пары на ее плечо:

$$|\mathbf{m}| = ah; \tag{19.2}$$

2) момент пары перпендикулярен к плоскости пары;

3) момент пары направлен в такую сторону, из которой вращение пары кажется происходящим против хода часовой стрелки (для правой системы).

Действительно, так как правая часть равенства (19.1) не зависит от выбора точки O, то ее можно взять на линии

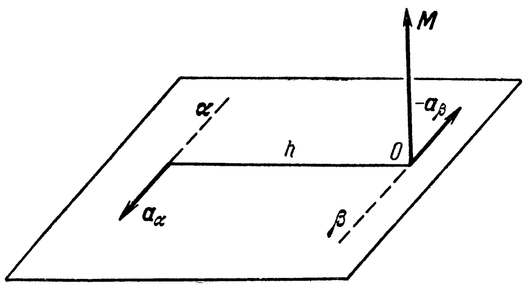

Рис. 65.

действия одного из векторов пары, например на β. Тогда $\mathbf{m}_O(-\mathbf{a}_\beta) = 0$ и $\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_\alpha)$ (рис. 65). На основании (13.3) будем иметь

$$|\mathbf{m}| = ah,$$

где h — плечо пары (при данном выборе полюса O оно является одновременно и плечом вектора $\mathbf{a}_\alpha$).

Вторые два свойства (перпендикулярность момента $\mathbf{m}$ к плоскости пары и его направление) следуют из равенства $\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_\alpha)$ и определения момента $\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_\alpha)$ — см. стр. 100.

Так как главный вектор пары $\mathbf{R}$ равен нулю, а ее главный момент при $h \neq 0$ не равен нулю, то пара векторов не эквивалентна нулю (см. п. 1 § 18). Кроме того, эквивалентные системы имеют равные главные векторы и главные моменты, поэтому пару векторов нельзя заменить одним вектором *).

Таким образом, пара векторов представляет простейшую неуравновешенную систему векторов, которую нельзя заменить одним вектором.

*) Система, состоящая из одного вектора, имеет главный вектор, равный данному.

2. Свойства пар. Так как главный вектор любой пары равен нулю, то для доказательства эквивалентности двух пар достаточно показать, что равны их векторы-моменты (по основной теореме). Это обстоятельство лежит в основе доказательства следующих свойств пар векторов.

Свойство 1. Пару векторов можно переносить как угодно в плоскости ее действия.

Свойство 2. Пару векторов можно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости пары.

Свойство 3. Величины векторов пары можно изменять обратно пропорционально плечам.

Доказательство этих свойств непосредственно следует из того, что при указанных операциях вектор-момент пары не изменится ни по величине, ни по направлению. Важно отметить, что ни одна из этих операций не применима к одному вектору (один вектор нельзя поворачивать, параллельно переносить на новую линию действия, менять модуль вектора).

Естественно, что любой вектор-момент $\mathbf{m}$ можно всегда, и притом бесчисленным множеством способов, рассматривать как момент некоторой пары $\{\mathbf{a}_\alpha; -\mathbf{a}_\beta\}$ $(\alpha \| \beta)$. Для того чтобы построить одну из таких пар, достаточно построить плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{m}$, и на ней нанести две параллельные линии α и β. Два вектора $\mathbf{a}_\alpha$ и $-\mathbf{a}_\beta$, модули которых равны $m:h$ (h — расстояние между α и β), направленных таким образом, что вращение этих векторов является правосторонним по отношению к $\mathbf{m}$, определяют искомую пару. На этом основании можно говорить, что пара векторов представляется своим вектором-моментом, и наоборот.

То обстоятельство, что момент пары векторов, определенный формулой (19.1), не зависит от выбора в пространстве полюса O, относительно которого вычисляются моменты векторов, составляющих пару, свидетельствует о том, что *момент пары* $\mathbf{m}$ *есть вектор свободный*. Об этом свидетельствуют также первые два свойства пар, которые устанавливают возможность переноса не только момента, но и самой пары.

Рассмотрим k пар в пространстве:

$$\left\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; -\mathbf{a}_{1\beta_1}\right\}, \ \ldots, \ \left\{\mathbf{a}_{k\alpha_k}; \ \ldots; \ -\mathbf{a}_{k\beta_k}\right\}, \ (\alpha_i \| \beta_i).$$

Каждая из этих пар вполне представляется свободным вектором $\mathbf{m}_i$, поэтому вместо k пар скользящих векторов можно рассматривать k свободных векторов

$$\mathbf{m}_1; \ldots; \mathbf{m}_k.$$

Как было показано в § 16, совокупность k свободных векторов эквивалентна одному свободному вектору, равному их сумме. Таким образом, будем иметь

$$\{\mathbf{m}_1; \ldots; \mathbf{m}_k\} \infty \mathbf{M}, \tag{19.3}$$

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_k. \tag{19.4}$$

Естественно, что вектор $\mathbf{M}$ можно представить некоторой парой $\{\mathbf{a}_\alpha; -\mathbf{a}_\beta\}$ $(\alpha \| \beta)$, которую будем называть *результирующей парой* данной системы пар. Все сказанное можно кратко объединить в четвертое свойство пар.

Свойство 4. Совокупность нескольких пар векторов эквивалентна одной паре, момент которой равен сумме моментов данных пар.

Рассмотрим некоторую систему скользящих векторов, состоящую из n скользящих векторов $\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ и k пар, моменты которых равны $\mathbf{m}_j$. Естественно, что эту систему можно рассматривать как систему, состоящую из $n+2k$ скользящих векторов, но можно рассматривать и как систему, состоящую из n скользящих векторов $\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ и k свободных векторов $\mathbf{m}_j$:

$$\{\mathbf{a}_{i\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}; \quad \mathbf{m}_1; \ldots; \mathbf{m}_k\}. \tag{19.5}$$

Следует иметь в виду, что в этой системе векторы $\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\mathbf{m}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ имеют разную размерность, однако, учитывая свойства пар, для нее можно установить понятие главного вектора и главного момента, которые будут соответственно равны:

$$\begin{gathered} \mathbf{R} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n, \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_1) + \ldots + \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_n) + \mathbf{m}_1 + \ldots + \mathbf{m}_k. \end{gathered} \tag{19.6}$$

3. **Винт** (продолжение — см. пп. 10 и 11 § 14). В § 14 винт был определен как совокупность **двух коллинеарных** векторов, модуль одного из которых имеет размерность модуля момента другого вектора.

Это определение винта как совокупности двух коллинеарных векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ имеет свои преимущества, однако в некоторых случаях винт удобнее определить совокупностью векторов одной природы. Пользуясь тем, что вектор-момент **M** можно представить парой векторов, лежащих в плоскости, перпендикулярной к **M**, определим *винт* как *совокупность вектора и пары векторов, лежащих в плоскости, перпендикулярной к данному вектору* (рис. 66).

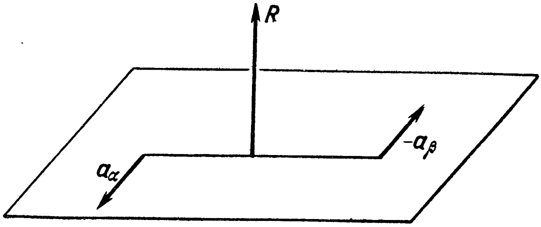

Рис. 66.

Преимущество такого представления винта состоит в том, что векторы, определяющие винт, имеют одну природу, недостаток — винт определяется тремя векторами, а не двумя, как было раньше.

§ 20. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

1. Общие соображения. Основная теорема дает возможность, не прибегая к элементарным операциям, построить другую систему векторов, эквивалентную данной. Для этого нужно выполнить только два условия: необходимо, чтобы вновь построенная система имела главный вектор и главный момент, равные соответствующим величинам старой системы. При конструировании новой системы можно задать некоторые ее элементы заранее и подобрать другие из уравнений, определяющих главный вектор и главный момент. Решение задачи, очевидно, можно расположить в следующем порядке. Предположим, что дана система

$$\left\{\mathbf{a}_{1\alpha_1};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{n\alpha_n}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

и требуется построить систему

$$\left\{\mathbf{b}_{1\beta_1};\ \ldots;\ \mathbf{b}_{k\beta_k}\right\}, \qquad (\mathrm{II})$$

эквивалентную данной. Так как система (I) задана, то вычислим ее главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{M}_O$ (O—произвольная точка пространства). Вычисление $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ удобнее всего производить через проекции по формулам (14.2′) и (14.6′), причем оси координат и точку O полезно выбрать так, чтобы были максимально сокращенные вычисления (как правило, для этого нужно совместить точку O с началом координат). Так как главный вектор искомой системы (II) и ее главный момент согласно основной теореме должны равняться $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$, то будем иметь два векторных уравнения:

$$\begin{gathered} \mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\ \ldots\ +\mathbf{b}_k=\mathbf{R}, \\ \mathbf{m}_O(\mathbf{b}_1)+\mathbf{m}_O(\mathbf{b}_2)+\ \ldots\ +\mathbf{m}_O(\mathbf{b}_k)=\mathbf{M}_O, \end{gathered} \tag{20.1}$$

которые можно заменить шестью скалярными уравнениями:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{k} b_{jx}=R_x;\quad \sum_{j=1}^{k} b_{jy}=R_y;\quad \sum_{j=1}^{k} b_{jz}=R_z; \\ \sum_{j=1}^{k} m_{Ox}(\mathbf{b}_j)=M_{Ox};\quad \sum_{j=1}^{k} m_{Oy}(\mathbf{b}_j)=M_{Oy};\quad \sum_{j=1}^{k} m_{Oz}(\mathbf{b}_j)=M_{Oz}. \end{gathered} \tag{20.2}$$

В этих уравнениях правые части известны (они определены из системы (I)), а левые части должны быть подобраны так, чтобы уравнения были удовлетворены.

Как уже было показано, скользящий вектор определяется пятью независимыми скалярными величинами (см. § 13, п. 5); следовательно, если конструируемая система состоит из k скользящих векторов, то она будет определяться $5k$ числами. Эти $5k$ скалярных величин должны удовлетворять шести уравнениям (20.2); поэтому для того, чтобы построить систему k скользящих векторов, эквивалентную данной системе, можно произвольно задать $5k-6$ чисел, тогда остальные шесть величин определятся из уравнений эквивалентности (20.2) (естественно, что выбор этих $5k-6$ величин должен быть подчинен условию разрешимости полученной системы уравнений).

2. Приведение системы скользящих векторов к системе двух векторов (аналитическое решение). Так как существует бесчисленное множество систем, эквивалентных данной, то большое значение имеет выбор простейшей системы. Прежде всего следует остановиться на вопросе, что следует понимать под простейшей системой? Хотя вопрос этот и не имеет точного ответа, однако можно считать, что простейшая система должна содержать наименьшее число векторов. В частности, если данную систему можно привести к нулю, то простейшей системой для данной будем считать нулевую систему, если система приводится к одному вектору, то простейшей системой будем считать этот вектор. Было показано (п. 2 § 17), что любую систему скользящих векторов можно привести к эквивалентной ей системе двух векторов, однако геометрическое решение, имея большое теоретическое значение, практически неприменимо, так как оно требует много пространственных построений. Поэтому представляет интерес аналитическое решение, свободное от этих недостатков.

Пусть система данных векторов с главным вектором $\mathbf{R}$ и главным моментом $\mathbf{M}_O$ (O — начало координат) эквивалентна двум векторам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, причем будем считать, что эти векторы приложены в точках $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$ соответственно. Уравнения (20.1) примут вид

$$\begin{gathered} \mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{R}, \\ \mathbf{r}_1\times\mathbf{P}+\mathbf{r}_2\times\mathbf{Q}=\mathbf{M}_O, \end{gathered} \tag{20.3}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ — известные векторы, а векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ нужно подобрать так, чтобы эта система имела решение. Из первого уравнения выразим $\mathbf{P}$ через $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P}=\mathbf{R}-\mathbf{Q} \tag{20.4}$$

и внесем это значение во второе уравнение:

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{Q}=\mathbf{M}_O+\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1. \tag{20.5}$$

Один из векторов, $\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_2$, можно выбрать произвольно; пусть это будет вектор $\mathbf{r}_1$. Тогда правая часть этого равенства сделается вполне определенным вектором. Вектор $\mathbf{r}_2$ выберем из условия, что векторы $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{M}_O+\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1$ должны быть взаимно перпендикулярны и, следовательно, их скалярное произведение равняется нулю. Отсюда

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{M}_O+\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1)=0 \tag{20.6}$$

или

$$\mathbf{r}_2(\mathbf{M}_O+\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1)=\mathbf{r}_1\mathbf{M}_O. \tag{20.6'}$$

Из этого следует, что точка $B(\mathbf{r}_2)$ должна лежать в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{r}_1$ и проходящей через точку $A(\mathbf{r}_1)$ [см. уравнение плоскости (8.15) и (8.14)]. Возьмем на этой плоскости одну точку B_2; тем самым будет определен радиус-вектор $\mathbf{r}_2$, удовлетворяющий условию (20.6). После этого нужно выбрать вектор $\mathbf{Q}$ так, чтобы он обращал в тождество равенство (20.5), и, пользуясь выражением (20.4), найти вектор $\mathbf{P}$.

Из приведенного решения видно, что точку приложения одного вектора можно выбрать произвольно, кроме того, имеются большие возможности варьирования при выборе второго вектора (как точки приложения, так и самого вектора).

Все вычисления значительно упрощаются, если совместить начало координат с точкой приложения первого вектора $\mathbf{a}$. В этом случае $\mathbf{r}_1 = 0$ и равенства (20.5) и (20.6′) примут вид

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{Q} = \mathbf{M}_O, \tag{20.7}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathbf{M}_O = 0. \tag{20.8}$$

Заметим, что это упрощение не нарушает общности полученного решения, так как оно не ограничивает выбора точки приложения первого вектора, а налагает условие только на выбор начала координат.

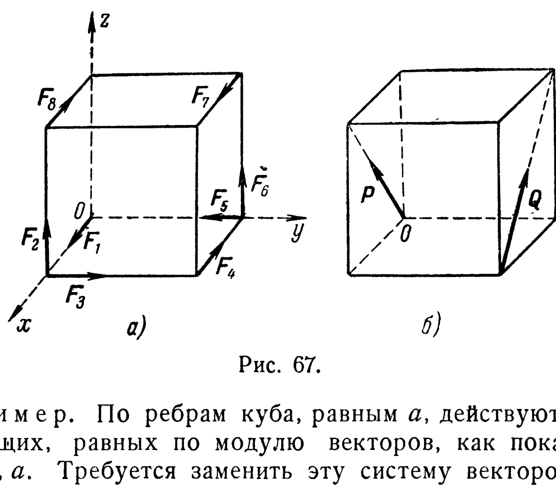

Рис. 67.

П р и м е р. По ребрам куба, равным a, действуют восемь скользящих, равных по модулю векторов, как показано на рис. 67, a. Требуется заменить эту систему векторов двумя векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, из которых один проходит через точку O.

Найдем прежде всего главный вектор и главный момент данной системы (см. (14.2′), (14.6′), (13.14)):

$$R_x = F + 0 + 0 - F + 0 + 0 + F - F = 0,$$
$$R_y = 0 + 0 + F + 0 - F + 0 + 0 + 0 = 0,$$
$$R_z = 0 + F + 0 + 0 + 0 + F + 0 + 0 = 2F,$$
$$M_x = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + Fa + 0 + 0 = Fa,$$
$$M_y = 0 - Fa + 0 + 0 + 0 + 0 + Fa - Fa = -Fa,$$
$$M_z = 0 + 0 + Fa + Fa + 0 + 0 - Fa + 0 = Fa.$$

Так как по условию один вектор проходит через точку O, то $\mathbf{r}_1 = 0$, и следует пользоваться формулами (20.7) и (20.8). Запишем уравнение (20.8) в скалярной форме:

$$x_2 M_x + y_2 M_y + z_2 M_z = 0,$$

или для данной задачи:

$$x_2 Fa - y_2 Fa + z_2 Fa = 0.$$

Положим $z_2 = 0$ и $y_2 = a$; тогда $x_2 = a$ и, следовательно, радиус-вектор $\mathbf{r}_2$ определен:

$$\mathbf{r}_2 (a,\ a,\ 0).$$

Векторному уравнению (20.7) относительно $\mathbf{Q}$ соответствуют три скалярных уравнения, из которых независимых только два (см. (11.11)):

$$y_2 Q_z - z_2 Q_y = M_x,$$
$$z_2 Q_x - x_2 Q_z = M_y,$$
$$x_2 Q_y - y_2 Q_x = M_z,$$

или, учитывая значения x_2, y_2, z_2, M_x, M_y, M_z:

$$aQ_z = Fa,$$
$$-aQ_z = -Fa,$$
$$aQ_y - aQ_x = Fa.$$

Первые два уравнения эквивалентны, и из них следует, что $Q_z = F$. Положим $Q_y = 0$, тогда из последнего уравнения найдем $Q_x = -F$. Таким образом, вектор $\mathbf{Q}$ также определен:

$$\mathbf{Q} (-F,\ 0,\ F).$$

Вектор $\mathbf{P}$ найдем из равенства $\mathbf{P}=\mathbf{R}-\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{P}(F,\ 0,\ F).$$

Векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ равны по модулю $\left(P=Q=\frac{\sqrt{2}}{2}F\right)$, они действуют по диагоналям боковых граней куба, как показано на рис. 67, *б*. Системы, изображенные на рис. 67, *а* и *б*, эквивалентны. Естественно, что существует бесчисленное множество других решений.

3. Приведение системы скользящих векторов к вектору и паре. Рассмотрим приведение системы скользящих векторов к другой простейшей системе, а именно к вектору и паре.

Теорема Пуансо. *Любую систему скользящих векторов всегда можно привести к одному скользящему вектору и одной паре* (среди этих элементов могут быть и нулевые).

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ — главный вектор и главный момент данной системы скользящих векторов

$$\left\{\mathbf{a}_{1\alpha_1};\ \ldots;\ \mathbf{a}_{n\alpha_n}\right\}, \tag{20.9}$$

причем точка O хотя и произвольна, но фиксирована. Рассмотрим систему (см. (19.5))

$$\{\mathbf{R}_O,\ \mathbf{M}_O\}. \tag{20.10}$$

В этих обозначениях индекс O при $\mathbf{R}$ означает, что линия действия вектора $\mathbf{R}$ проходит через точку O, а тот же индекс в $\mathbf{M}$ означает, что этот вектор-момент равен главному моменту данной системы относительно точки O.

Главный вектор системы (20.10) согласно (19.6) равен $\mathbf{R}$, а главный момент этой системы относительно того же полюса O равен $\mathbf{M}_O+\mathbf{m}_O(\mathbf{R}_O)=\mathbf{M}_O$, так как $\mathbf{m}_O(\mathbf{R}_O)=0$ (вектор $\mathbf{R}_O$ по условию проходит через точку O). Таким образом, системы (20.9) и (20.10) имеют равные главные векторы и главные моменты; в силу основной теоремы они эквивалентны.

Доказательство теоремы Пуансо теперь следует из того, что момент $\mathbf{M}_O$ представляет некоторую пару, плоскость которой перпендикулярна к $\mathbf{M}_O$.

Приведение системы скользящих векторов к вектору и паре является наиболее простой математической операцией. Действительно, достаточно вычислить главный вектор и главный момент системы. Тогда система, составленная из главного вектора, проходящего через полюс O, и пары, момент которой равен главному моменту, будет эквивалентна данной системе (естественно, что можно говорить о системе, состоящей из скользящего вектора $\mathbf{R}_O$ и свободного вектора момента $\mathbf{M}_O$).

4. Пример из кинематики. В кинематике доказывается, что угловая скорость твердого тела есть скользящий вектор, для которого справедливы все свойства этих векторов. В частности, в разделе сложения вращений доказывается, что результирующее движение тела, участвующего в паре вращений (одновременное вращение вокруг двух параллельных осей с равными по величине, но противоположно направленными угловыми скоростями), будет поступательным движением, скорость которого равна моменту пары вращения. Последний вывод не является неожиданным, если учесть, что скорость любой точки тела, участвующего во вращательном движении, представляет момент вектора угловой скорости относительно выбранной точки (см. (9.6)).

Пусть тело участвует одновременно в n вращениях, с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$, и k поступательных движениях, скорости которых равны $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Рассматривая каждую скорость $\mathbf{v}_j$ соответствующего поступательного движения как момент некоторой пары вращения, можно считать, что на тело действует система векторов

$$\{\boldsymbol{\omega}_1; \ldots; \boldsymbol{\omega}_n; \mathbf{v}_1; \ldots; \mathbf{v}_k\}, \tag{20.11}$$

состоящая из n скользящих векторов $\boldsymbol{\omega}_i$ и k моментов $\mathbf{v}_j$. Главный вектор этой системы $\boldsymbol{\omega}$ и ее главный момент $\mathbf{v}_O$ относительно произвольного полюса O согласно (19.6) будут равны

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_1 + \ldots + \boldsymbol{\omega}_n, \\ \mathbf{v}_O &= \mathbf{m}_O(\boldsymbol{\omega}_1) + \ldots + \mathbf{m}_O(\boldsymbol{\omega}_n) + \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k. \end{aligned} \tag{20.12}$$

На основании теоремы Пуансо система векторов (20.11) эквивалентна системе $\{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_O\}$ при условии, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ проходит через точку O. Физически это означает, что результирующее движение можно рассматривать как совокупность мгновенного поступательного движения тела со скоростью $\mathbf{v}_O$ и мгновенного вращения вокруг оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (движения «мгновенные», так как все их элементы меняются с течением времени). Так как главный вектор системы не зависит от выбора полюса, то, следовательно, и угловая скорость твердого тела $\boldsymbol{\omega}$ (абсолютная или результирующая угловая скорость) не зависит от выбора полюса. Это важное кинематическое свойство получено здесь как простое следствие общих положений теории скользящих векторов.

5. Приведение системы скользящих векторов к винту. Пусть точка, относительно которой вычисляется главный момент $\mathbf{M}_O$, лежит на центральной оси системы. В этом случае главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{M}_O$ будут коллинеарны, причем модуль главного момента будет иметь минимальное значение (см. п. 8 § 14). Система, состоящая из вектора $\mathbf{R}$, лежащего на центральной оси, и вектора момента $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M} = \mathbf{M}_O$), представляет на основании теоремы Пуансо систему, эквивалентную данной. Но такая совокупность является винтом системы векторов (см. п. 11 § 14), поэтому можно утверждать, что *винт системы скользящих векторов и сама система эквивалентны*:

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} \backsim \hat{S}(\mathbf{R}, \mathbf{M}), \tag{20.13}$$

где $\hat{S}$ — винт системы скользящих векторов.

Таким образом, система скользящих векторов всегда может быть приведена к винту, т. е. к скользящему вектору $\mathbf{R}$, лежащему на центральной оси системы, и коллинеарному ему вектору-моменту $\mathbf{M}$, причем последний, естественно, можно заменить парой, плоскость которой перпендикулярна к $\mathbf{R}$ (один из элементов винта или оба сразу могут равняться нулю).

Так как винт системы определяется единственным образом, то задача приведения системы скользящих векторов к винту имеет единственное решение (в отличие от приведения системы к двум векторам или к вектору и паре). Это позволяет сразу же решить вопрос о возможных дальнейших упрощениях системы. Действительно, в п. 11 § 14, стр. 125 было показано, что в зависимости от значения инвариантов системы I_1 и I_2 ее винт может вырождаться.

Используем это обстоятельство для анализа возможности приведения системы скользящих векторов к простейшему виду.

1) $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$. В этом случае винт вырождается в один скользящий вектор $\mathbf{R}$ (момент винта $\mathbf{M} = 0$), т. е. система скользящих векторов *эквивалентна одному вектору* $\mathbf{R}$, называемому *равнодействующим вектором*. Ось винта определяется обычным путем, и она называется в этом случае линией действия равнодействующего вектора.

2) $I_1 = 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$ (O — произвольная точка пространства). В этом случае $\mathbf{R} = 0$, главный момент системы одинаков для всех точек пространства и винт системы вырождается в один вектор-момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}_O$. Это означает, что система скользящих векторов *эквивалентна одному вектору-моменту* $\mathbf{M}$, равному главному моменту системы векторов относительно произвольной точки пространства (или одной паре).

3) $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ — винт равен нулю, и, следовательно, система эквивалентна нулю (или уравновешена).

4) $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$ — общий случай, винт содержит все свои элементы.

Пример. На рис. 61, *a*, стр. 126 изображена система двенадцати скользящих векторов, а на рис. 61, *b* изображен винт этой системы; эти две системы эквивалентны.

6. Примеры. I. Динамический винт. Статика базируется на нескольких аксиомах, из которых, в частности, вытекает, что сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является скользящим вектором. Поэтому система сил, приложенных к абсолютно твердому телу, в общем случае приводится к винту, состоящему из одной силы и одной пары сил, плоскость которой перпендикулярна к силе. Этот винт называется *динамическим винтом* или, сокращенно, *динамой*. В частных случаях динамический винт вырождается в одну равнодействующую силу или одну пару сил или, наконец, система сил взаимно уравновешивается.

II. Кинематический винт. Если твердое тело участвует одновременно в n вращениях с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ и k поступательных движениях, скорости которых равны $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, то можно сказать, что система скоростей

$$\{\boldsymbol{\omega}_1; \ldots; \boldsymbol{\omega}_n; \quad \mathbf{v}_1; \ldots; \mathbf{v}_k\}$$

состоит из n скользящих векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ и k моментов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ — см. пример из кинематики на стр. 153.

Эта система по общим правилам приводится к винту, который называется *мгновенным кинематическим винтом*. Обозначим через $\mathbf{v}$ момент винта (минимальный главный момент системы); тогда мгновенный кинематический винт будет состоять из совокупности двух коллинеарных векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$. Физически это означает, что результирующее движение можно теперь рассматривать как мгновенное винтовое движение, состоящее из поступательного движения тела параллельно оси винта со скоростью $\mathbf{v}$ и вращения тела вокруг оси винта с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

7. Уравнения равновесия векторов. Для того чтобы система скользящих векторов была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы и ее главный момент относительно произвольной точки пространства равнялись нулю (см. теорему п. 1 § 18):

$$\mathbf{R}=0, \quad \mathbf{M}_O=0. \tag{20.14}$$

Эти два векторных уравнения эквивалентны шести скалярным уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ix}=0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{iy}=0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{iz}=0, \tag{20.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{a}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{a}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{a}_i)=0, \tag{20.16}$$

которые будем называть уравнениями равновесия системы скользящих векторов, причем первые три уравнения, определяющие равенство нулю главного вектора, называются уравнениями проекции, а вторые — уравнениями моментов (они определяют равенство нулю главного момента).

Число уравнений равновесия при произвольном расположении векторов в пространстве равно шести.

Естественно, что при частном способе задания системы скользящих векторов, например для плоской системы, системы сходящихся векторов и т. п., некоторые уравнения обратятся в тождества и число независимых уравнений равновесия соответственно уменьшится.

8. Вторая теорема Вариньона. *Если система скользящих векторов эквивалентна одному равнодействующему вектору, то момент этого равнодействующего вектора относительно произвольной точки пространства равен сумме* *моментов всех векторов, образующих систему, относительно той же точки.*

Доказательство. Пусть

$$\{\mathbf{a}_{1\alpha_1}; \ldots; \mathbf{a}_{n\alpha_n}\} \infty \mathbf{R}.$$

Система, стоящая справа, состоит из одного вектора, и следовательно, ее главный момент относительно произвольной точки O равен $\mathbf{m}_O(\mathbf{R})$. Согласно основной теореме главные моменты системы, стоящей слева, и системы, стоящей справа, равны, т. е.

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{M}_O,$$

где $\mathbf{M}_O$ — главный момент данной системы. Но по определению главного момента

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_i),$$

следовательно,

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_i), \tag{20.17}$$

что доказывает вторую теорему Вариньона.

Примечание. Первая теорема Вариньона является частным случаем второй (так как если векторы имеют одну общую точку, то они приводятся к одному равнодействующему вектору).

§ 21. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

1. Система сходящихся скользящих векторов. Если линии действия всех векторов, входящих в систему, пересекаются в одной точке, то данная система называется *сходящейся*. Пусть O — точка пересечения линий действия всех векторов. Выберем эту точку за полюс; тогда моменты всех векторов относительно этой точки будут равны нулю (см. примечание 1 п. 2 § 13, стр. 101) и главный момент системы будет равен нулю. Отсюда следует, что либо эта система приводится к одному вектору $\mathbf{R}$, проходящему через точку O, либо она уравновешена (если $\mathbf{R} = 0$) (см. п. 5 § 20). Уравнения моментов (20.16) обращаются в тождества, а уравнения равновесия содержат только три независимых уравнения проекций:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{iz}=0. \tag{21.1}$$

Если система сходящихся векторов является одновременно плоской, то, совместив координатную плоскость xy с плоскостью векторов, получим $a_{iz}\equiv 0$, и независимых уравнений равновесия будет только два.

2. Плоская система скользящих векторов. Если все скользящие векторы, входящие в систему, расположены в одной плоскости, то такая система называется *плоской*. Совместим координатную плоскость xy с плоскостью векторов. Тогда каждый вектор a_i, находясь в плоскости xy, либо будет пересекать оси x и y, либо будет параллелен одной из них и пересекать другую. В обоих случаях моменты этого вектора относительно осей x и y будут равны нулю (см. стр. 108):

$$m_x(\mathbf{a}_i)=m_y(\mathbf{a}_i)=0.$$

Отсюда следует, что проекции главного момента $\mathbf{M}_O$ на оси x и y равны нулю. Кроме того, проекции всех векторов на ось z будут тоже равны нулю (так как они лежат в плоскости xy) и, следовательно, $R_z=0$. Таким образом, имеем:

$$\mathbf{R}(R_x,\ R_y,\ 0), \qquad \mathbf{M}(0,\ 0,\ M_z),$$

где R_x, R_y, M_z определяются обычным способом.

Из полученных выражений для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ следует, что второй инвариант системы $I_2=R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z$ равен нулю и поэтому плоская система скользящих векторов либо приводится к одному равнодействующему вектору, лежащему в плоскости системы (при $I_1\neq 0$), либо приводится к одной паре (при $I_1=0$ и $\mathbf{M}_O\neq 0$), либо эта система уравновешена; к невырожденному винту плоская система скользящих векторов не приводится (см. п. 5 § 20). Уравнения равновесия будут:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{a}_i)=0 \tag{21.2}$$

(независимых уравнений — три).

Пусть плоская система скользящих векторов приводится к одному равнодействующему вектору $\mathbf{R}$; найдем линию его действия. Имеем, как обычно:

$$\mathbf{R}\times\mathbf{M}_O(R_yM_z;\ -R_xM_z;\ 0),$$

$$\mathbf{r}_0\left(\frac{R_yM_z}{R_x^2+R_y^2};\ -\frac{R_xM_z}{R_x^2+R_y^2};\ 0\right).$$

Уравнения линии действия равнодействующей согласно (14.19′) будут:

$$\frac{x-\dfrac{R_yM_z}{R_x^2+R_y^2}}{R_x}=\frac{y+\dfrac{R_xM_z}{R_x^2+R_y^2}}{R_y}=\frac{z}{0}.$$

Из последнего отношения найдем, что $z=0$, т. е. равнодействующий вектор лежит в плоскости xy (плоскости действия векторов). Объединяя первые два отношения, легко получим уравнение линии действия равнодействующего вектора плоской системы векторов:

$$R_yx-R_xy-M_z=0. \qquad (21.3)$$

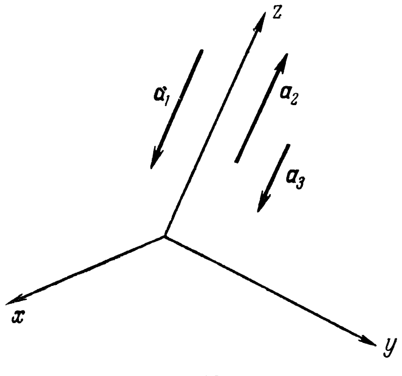

Рис. 68.

3. Система параллельных скользящих векторов. Пусть все векторы, входящие в систему, параллельны между собой. Построим систему координат так, чтобы ось z была параллельна векторам, тогда оси x и y будут перпендикулярны к ним (рис. 68). Проекции каждого вектора на оси x и y и их моменты относительно оси z будут равны нулю:

$$R_x=\sum_{i=1}^{n}a_{ix}=0,\quad R_y=\sum_{i=1}^{n}a_{iy}=0,\quad M_z=\sum_{i=1}^{n}m_z(\mathbf{a}_i)=0;$$

следовательно,

$$\mathbf{R}\ (0,\ 0,\ R_z),\quad \mathbf{M}_O\ (M_x,\ M_y,\ 0).$$

Второй инвариант системы $I_2 = R_xM_x + R_yM_y + R_zM_z$ равен нулю, поэтому система параллельных скользящих векторов либо приводится к одному равнодействующему вектору ($R_z \neq 0$) либо к одной паре ($R_z = 0$, $\mathbf{M} = 0$), либо уравновешена; к невырожденному винту систему параллельных скользящих векторов привести нельзя.

Так как каждый вектор $\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ параллелен оси z, то проекция вектора $\mathbf{a}_{i\alpha_i}$ на ось z равна $\pm a_i$, причем знак плюс берется, если направление вектора $\mathbf{a}_i$ совпадает с направлением оси z, и знак минус, если направление вектора $\mathbf{a}_i$ противоположно направлению оси z. Таким образом,

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} \pm a_i. \tag{21.4}$$

Пусть $R_z \neq 0$. Найдем линию действия равнодействующего вектора, модуль которого равен $|R_z|$. Имеем

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O(-R_zM_y;\ R_zM_x;\ 0),$$

$$\mathbf{r}_0\left(-\frac{M_y}{R_z};\ \frac{M_x}{R_z};\ 0\right).$$

Следовательно, уравнения линии действия равнодействующего вектора будут (см. (14.19′))

$$\frac{x + \frac{M_y}{R_z}}{0} = \frac{y - \frac{M_x}{R_z}}{0} = \frac{z}{R_z}.$$

Отсюда

$$x = -\frac{M_y}{R_z}, \qquad y = \frac{M_x}{R_z}. \tag{21.5}$$

Первое уравнение определяет плоскость, перпендикулярную к оси x, а второе — плоскость, перпендикулярную к оси y. Линия действия равнодействующего вектора образована пересечением этих плоскостей. Можно сказать иначе: линия действия равнодействующего вектора параллельна оси z и проходит через точку $\mathbf{r}_0\left(-\frac{M_y}{R_z},\ \frac{M_x}{R_z},\ 0\right)$.

Если система параллельных скользящих векторов уравновешена, то будет три независимых уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \pm a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{a}_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{a}_i) = 0. \quad (21.6)$$

Наконец, если система параллельных векторов лежит в одной плоскости, то независимых уравнений равновесия будет два.

4. Центр системы параллельных векторов. Рассмотрим систему параллельных векторов $\{\mathbf{a}_i\}$. Обозначим через A_i точку приложения вектора $\mathbf{a}_i$.

Пусть орт $\mathbf{a}^0$ определяет направление векторов, входящих в систему. Тогда

$$\mathbf{a}_i = \pm a_i \mathbf{a}^0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (21.7)$$

причем знак плюс берется в том случае, когда направления вектора $\mathbf{a}_i$ и орта $\mathbf{a}^0$ совпадают, и знак минус, когда направления этих векторов противоположные.

Будем считать, что главный вектор данной системы векторов не равен нулю:

$$R = \left| \sum_{i=1}^{n} \pm a_i \right| \neq 0$$

и, следовательно, система имеет равнодействующий вектор $\mathbf{R}$, параллельный данным векторам:

$$\mathbf{R} = \pm R \mathbf{a}^0,$$

причем его линия действия строго определена и может быть построена по уравнениям (21.5). Предположим, что мы, сохраняя параллельность, повернем все векторы $\mathbf{a}_{iA_i}$ вокруг их точек приложения (это равносильно повороту направляющего орта $\mathbf{a}^0$). При такой операции равнодействующий вектор $\mathbf{R}$ не изменит своей величины, но его линия действия займет новое положение в пространстве. Таким образом, каждому направлению орта $\mathbf{a}^0$, а тем самым и векторов $\mathbf{a}_{iA_i}$, соответствует своя линия действия равнодействующего вектора $\mathbf{R}$. Возникает вопрос, имеет ли вся совокупность этих линий общую точку? Если такая точка существует, то, очевидно, она будет обладать замечательным свойством: при вращении всех векторов $\mathbf{a}_{iA_i}$ вокруг их точек приложения (предполагается, что при этом сохраняется их параллельность) линия действия равнодействующего вектора $\mathbf{R}$ будет вращаться вокруг этой точки, оставаясь все время параллельной векторам $\mathbf{a}_{iA_i}$. Докажем, что такая точка, называемая в дальнейшем *центром параллельных векторов*, существует (естественно, что центр системы параллельных векторов принимают за точку приложения равнодействующего вектора $\mathbf{R}$).

Пусть $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки приложения вектора (т. е. точки A_i) и $\mathbf{r}_C$ радиус-вектор центра системы параллельных векторов (предполагаем, что он существует). Применим теорему Вариньона, выбрав за полюс, относительно которого вычисляются моменты, центр системы параллельных векторов. Тогда момент равнодействующего вектора будет равен нулю (он приложен к этой точке), и следовательно (см. (20.17)):

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CA_i} \times \mathbf{a}_i = 0,$$

так как

$$\mathbf{m}_C(\mathbf{a}_i) = \overrightarrow{CA_i} \times \mathbf{a}_i.$$

Внесем в последнее равенство значение $\mathbf{a}_i$, определяемое выражением (21.7), и учтем при этом, что $\overrightarrow{CA_i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C$ (рис. 69). Тогда получим

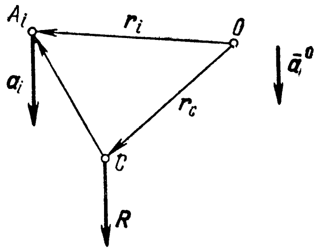

Рис. 69.

$$\sum_{i=1}^{n} \pm a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)) \times \mathbf{a}^0 = 0$$

или, вынося общий множитель $\mathbf{a}^0$ за знак суммы,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \pm a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C)\right) \times \mathbf{a}^0 = 0.$$

Так как по определению центра системы параллельных векторов это уравнение должно выполняться при любом направлении орта $\mathbf{a}^0$, то первый множитель должен равняться нулю (см. (9.3)):

$$\sum_{i=1}^{n} \pm a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C) = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} \pm a_i \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C \sum_{i=1}^{n} \pm a_i = 0$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i} \tag{21.8}$$

(по условию сумма, стоящая в знаменателе, не равна нулю).

Решение получилось вполне определенное, поэтому центр системы параллельных векторов существует и он единствен.

Векторное равенство, определяющее радиус-вектор центра системы параллельных векторов, эквивалентно трем координатным равенствам:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \pm a_i}. \tag{21.9}$$

Естественно, что если все векторы направлены в одну сторону, то эти формулы будут содержать только знак плюс.

Пример. Найти центр двух параллельных векторов, направленных в одну сторону. Имеем

$$\mathbf{r}_C = \frac{a_1 r_1 + a_2 r_2}{a_1 + a_2},$$

т. е. центр двух параллельных векторов, направленных в одну сторону, делит внутренним образом отрезок, соединяющий точки приложения данных векторов, на части, обратно пропорциональные модулям данных векторов (см. п. 7 § 7, стр. 54). Если векторы направлены в разные стороны, то точка C делит отрезок A_1A_2 внешним образом.

Меркин Давид Рахмильевич.

Алгебра свободных и скользящих векторов.

Редактор *А. П. Баева.*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше.*

Корректор *И. С. Цветкова.*

Сдано в набор 30/VIII 1961 г. Подписано к печати 16/I 1962 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 5,125. Условн. печ. л. 8,41. Уч.-изд. л. 7,52. Тираж 22 000 экз. Т-00917. Цена книги 33 коп. Заказ № 2769.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза. Ленинград, Измайловский пр., 29.